Шинжлэх Ухааны Академийн Мэдээ 2016 оны №01 (217)

DOI: http://dx.doi.org/10.5564/pmas.v56i01.679

ЗАРИМ ТУСГАЙ РАДИКАЛЫН ТУХАЙ

С.Төмөрбат
Математикийн тэнхим, Монгол улсын их сургууль, Монгол улс
Цахим шуудан: stumurbat@hotmail.com

Редакцид ирүүлсэн: 2016.03.01

Удирдтгал: *Энэхүү өгүүлэлд Амицур цагираг, уламжлагдах Амицур цагиргийн тухай судалсан бөгөөд радикал t -ийн анхдагч цагираг A бүр нь уламжлагдах Амицурын биш байх сонирхолтой радикалыг байгуулж судалсан юм.*

Түлхүүр үгс: *Курош-Амицур радикал, Амицурын нөхцөлтэй радикал, Амицур, Амицур биш цагираг, тусгай радикал.*

1

Энэ өгүүлэлд судалж буй бүх цагиргууд нэгжтэй байх албагүй ассоциатив цагираг юм.

Заншил ёсоор A цагиргийн идеал I -г, $I \lhd A$ гэж тэмдэглээ. Цагиргуудын анги γ нь

1. Гомоморфизмын хувьд битүү, өөрөөр хэлбэл (Хэрэв $I \lhd A$ ба $A \in \gamma$ бол $A/I \in \gamma$).

2. Өргөтгөлийн хувьд битүү, өөрөөр хэлбэл ($I \lhd A$ идеалын хувьд $I \in \gamma$ ба $A/I \in \gamma$ бол $A \in \gamma$).

3. Индуктив чанартай, өөрөөр хэлбэл (Хэрэв $I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\lambda \subseteq \ldots$, $A = \bigcup A_\lambda$ ба $I_\lambda \in \gamma$ бол $A \in \gamma$).

эдгээр нөхцөлүүдийг хангаж байвал *Курош-Амицурын радикал* гэнэ. Хэрэв $I \lhd A$, $I \in \gamma$ бол γ*-идеал* гэж нэрлэдэг. Хэрэв γ нь Курош-Амицурын радикал анги бол γ анги нь дурын цагираг A ийн хувьд түүний хамгийн том γ-идеалыг агуулах бөгөөд түүнийг $\gamma(A)$ гэж тэмдэглээ. Түүнийг A цагиргийн *радикал* гэнэ. Курош-Амицурын радикал анги γ -г цаашид товчоор *радикал анги* буюу $\gamma(A)$*-радикал* гэж нэрлэнэ.

Хэрэв γ-нь радикал анги бол

$$S\gamma = \{A \mid \gamma(A) = 0\}$$

үүнийг γ радикалын *хагас энгийн анги* гэнэ.

Түлхүүр үгс: Курош-Амицур радикал, Амицурын нөхцөлтэй радикал, Амицур, Амицур биш цагираг, тусгай радикал.

Өгүүлбэр 1.1. [4] *(Мөрдлөгөө 2.5(в))*
γ нь радикал байг. Тэгвэл доорх өгүүлбэрүүд хоорондоо эквивалент байна. Үүнд:
(a) γ нь Амицур чанартай.
(b) Хэрэв $\gamma(A[X]) \neq 0$ бол дурын A цагирагийн хувьд $\gamma(A[X]) \cap A \neq 0$ байна.

Цагиргуудын анги $\mathcal{M}$ нь хэрэв $0 \neq I \lhd A \in \mathcal{M}$ бол I нь $\mathcal{M}$ -д харъяалагдах тэгээс ялгаатай гомоморф дүртэй бол *регуляр анги* гэж нэрлэдэг. Тухайн тохиолдолд $I \lhd A \in \mathcal{M} \Rightarrow I \in \mathcal{M}$ бол *уламжлагдах анги* гэж нэрлэх бөгөөд тэр нь регуляр ангийн хялбар жишээ юм.

Хэрэв $\mathcal{M}$ регуляр анги бол

$$U\mathcal{M} = \{A \mid A \text{ нь } \mathcal{M}\text{-д тэгээс ялгаатай гомоморф дүргүй бол}\}$$

радикал анги болох бөгөөд түүнийг $\mathcal{M}$ -ийн *дээд радикал* гэж нэрлэнэ.

S нь цагиргуудын дурын анги байг. Тэгвэл S ийг агуулсан хамгийн бага радикал анги оршин байх учир түүнийг S -ээр үүсгэгдсэн *доод радикал* гээд $\mathcal{L}(S)$ гэж тэмдэглэдэг.

Бид дараах сонгодог радикалуудын тэмдэглэгээг хийе.

- Бүх анхдагч цагиргуудын дээд радикалыг β гэж тэмдэглээд *Бэрийн радикал* гэнэ.
- Бүх локаль нильпотент цагиргуудын анги нь радикал анги үүсгэх ба түүнийг *локаль нильпотент радикал* гээд $\mathcal{L}$ гэж тэмдэглэнэ.
- Бүх примитив цагиргуудын дээд радикалыг *Джекобсоны радикал* гээд $\mathcal{J}$ гэж тэмдэглэнэ.
- Бүх, зүрхэвчиндээ тэгээс ялгаатай идемпотент элемент агуулсан дэд шулуун үл задрах цагиргуудын дээд радикалыг $\mathcal{B}$ гэж тэмдэглээд *Бэрхнс радикал* гэж нэрлэдэг.
- Бүх нэгжтэй энгийн цагиргуудын дээд радикалыг *Броун-Маккая радикал* гэж нэрлээд $\mathcal{G}$ гэж тэмдэглэе.

Хэрэв $I \lhd A$ ба дурын $0 \neq J \lhd A$ идеалын хувьд $I \cap J \neq 0$ бол I -г A-д том идеал гээд $I \lhd^{\bullet} A$ гэж тэмдэглэнэ.

Ер нь радикал онолын ерөнхий шинж чанаруудыг [1] -аас үзээрэй.

Анхдагч цагиргуудын анги ν нь уламжлагдах ба том өргөтгөлийн хувьд битүү (өөрөөр хэлбэл $I \in \nu$ ба $I \lhd^{\bullet} A$ бол $I \in \nu$) бол *тусгай анги* гэж нэрлэдэг. $U\nu$ -радикалыг *тусгай радикал* гэдэг. Радикал онолын судалгаанд тусгай радикалын судалгаа онцгой байр суурь эзэлдэг.

2

Өгөгдсөн радикал γ -нь дурын цагираг A -ийн хувьд $(\gamma(A[x]) \cap A)[x] = \gamma(A[x])$ нөхцөлийг хангах бол үүнийг *Амицурын чанартай радикал* гэдэг. Энэ талын судалгааг [1], [2], [3], [4] ажлуудаас үзээрэй. Бидний зорилго Амицурын чанартай радикалыг судлах биш, Амицурын чанартай биш радикал болон Амицурын цагиргуудыг судлахад оршино.

Тодорхойлолт 2.1. Өгөгдсөн цагираг A нь дурын (уламжлагдах) радикал γ -ийн хувьд $(\gamma(A[x]) \cap A)[x] = \gamma(A[x])$ бол харгалзан (*уламжлагдах*) *Амицур цагираг* гэнэ.

Юун түрүүнд уламжлагдах Амицур цагираг оршин байх эсэх нь их анхаарал татна. Иймд дараах үр дүнгүүд болон жишээнүүдээр уламжлагдах Амицур цагираг маш олон оршин байхыг батлана.

Өгөгдсөн цагираг A ийн хувьд A ийн Абелийн бүлэг дээр дурын $x, y \in A$ хувьд $xy = 0$ гэсэн үржвэр тодорхойлогдсон цагиргийг тэг цагираг гээд A^0 гэж тэмдэглэе.

Санамж 2.1. $0 = \gamma(A^0[x])$ бол $0 = (\{0\} \cap A)[x] = 0[x] = \gamma(A^0[x])$ байна.

Өгүүлбэр 2.1. *Дурын A^0 цагираг нь Амицур цагираг байна.*

Баталгаа. Бид $A^0[x]$ гэсэн олон гишүүнтийн цагираг ба дурын уламжлагдах радикал γ -г авч үзье. Хэрэв $0 = \gamma(A^0[x])$ бол Санамж 2.1 ёсоор батлагдана. Энд $\overline{\gamma(A[x])}$ гэдгээр $\gamma(A[x])$-ийн гомоморф дүрийг нь тэмдэглэв.

Одоо $\gamma(A^0[x]) \neq 0$ байг. Тэгвэл $A^0[x]$ -нь тэг цагираг байх нь илэрхий. Иймд дурын дэд цагираг S нь идеал болно. Дурын элемент $g(x) \in \gamma(A^0[x])$ авч үзье. Тэгвэл $g(x) = a_{n_0}x^{n_0} + a_{n_0+1}x^{n_0+1} + \ldots + a_{n+s}x^{n+s}$ хэлбэртэй бичигдэнэ. Иймээс $g(x) \in \gamma(A^0[x])$ байх ба n хамгийн бага байх n_0 тоо олдоно. Тэгвэл $A^0[x]x^{n_0+1} \lhd A^0[x]$ ба $0 \neq \overline{\gamma(A^0[x])} \trianglelefteq A^0[x]/A^0[x]x^{n_0+1}$. Тэгвэл $\overline{\gamma(A^0[x])}$ ийн элементүүд нь $\overline{a_{n_0}x^{n_0}}$ хэлбэрийн элементүүдээс тогтоно. Одоо бид $f : \gamma(A^0[x]) \to A^0$ буулгалтыг $f(\overline{a_{n_0}x^{n_0}}) = a_{n_0}$ гэж тодорхойлбол энэ нь гомоморфизм болох нь илэрхий. Иймд A^0 дотор γ-радикал тэг биш дэд цагираг S^0 оршин байна. $S^0 \trianglelefteq A^0[x]$ ба $S^0 \in \gamma$ учраас $S^0 \subseteq \gamma(A^0[x])$. Иймээс $A^0 \cap \gamma(A^0[x]) \neq 0$ болно. Ийнхүү [4] дахь Өгүүлбэр 1.1.-ийн баталгаатай адилаар $(A^0 \cap \gamma(A^0[x]))[x] = \gamma(A^0[x])$ гэж батлагдана. □

Өгүүлбэр 2.1 ээс дурын тэг цагираг Амицурын цагираг байна.

Өгөгдсөн цагираг A, дурын радикал γ ийн хувьд эсвэл $\gamma(A) = 0$ эсвэл $\gamma(A) = A$ бол *unequivocal (төгс) цагираг* гэнэ.

Өгүүлбэр 2.2 ([3] лемм 3.1)**.** *A нь төгсгөлгүй бүхлийн муж ба $S = A[x_i \mid i \in I]$ нь $|I|$ ширхэг коммутатив хувьсагчтай олон гишүүнтийн цагираг байг. Тэгвэл дурын радикал γ ийн хувьд $A \cap \gamma(S) = 0$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл бол $\gamma(S) = 0$ байх явдал юм.*

Өгүүлбэр 2.3. *Хэрэв A нь төгсгөлгүй бүхлийн муж бүр Амицур цагираг байна.*

Баталгаа. Өгүүлбэр 2.2 -т $x_1 = x$, $n = 1$ гэж авбал $A \cap \gamma(A[x]) = 0 \Leftrightarrow \gamma(A[x]) = 0$ болно. Хэрэв $\gamma(A[x]) = 0$ бол батлах зүйл үгүй. Хэрэв $\gamma(A[x]) \neq 0$ бол $A \cap \gamma(A[x]) \neq 0$ болох ба [4] дахь Өгүүлбэр 1.1. ёсоор $\gamma(A[x]) = (A \cap \gamma(A[x]))[x]$ болно. □

Өгүүлбэр 2.4. *$A[x]$ нь төгс (unequivocal) цагираг бол A нь Амицур цагираг байна.*

Баталгаа. $A[x]$ нь төгс (unequivocal) цагираг байг. Дурын радикал γ -г авч үзье. Хэрэв $\gamma(A[x]) = 0$ бол мөн батлах зүйл үгүй. Хэрэв $\gamma(A[x]) \neq 0$ бол $A[x] \in \gamma$ болох ба $\gamma(A[x]) = A[x]$ биелнэ. Иймээс $A[x] \subseteq \gamma(A[x])$ учир $\gamma(A[x]) = (A \cap \gamma(A[x]))\,[x]$ болж батлагдана. $\square$

Дээрх үр дүнгүүдээс маш олон анхдагч Амицур цагираг оршин байна. Үүнд төгсгөлгүй талбар, $J = \left\{ \frac{2x}{2y+1} \mid (2x, 2y+1) = 1, x, y \in Z \right\}$ гэх мэт маш олныг зааж болно.

Санамж 2.2. Амицурын цагираг бүхэн уламжлагдах Амицурын цагираг байна.

Теорем 2.5. *Бүх анхдагч, уламжлагдах Амицурын цагирагуудын анги тусгай анги болно.*

Баталгаа. Бүх анхдагч, уламжлагдах Амицурын цагиргуудын ангийг ν гэж тэмдэглэе. Хэрэв $I \in \nu$ ба $I \lhd^{\bullet} A$ ба дурын бэхлэгдсэн уламжлагдах γ радикалыг авч үзье. Хэрэв $\gamma(A[x]) = 0$ бол батлах зүйл үгүй. Иймд $\gamma(A[x]) \neq 0$ гэж үзье. $0 \neq I \lhd^{\bullet} A$ ба I анхдагч учраас A анхдагч байх нь илэрхий. Түүнээс гадна $A[x]$ олон гишүүнтийн цагираг анхдагч болно. $\gamma(A[x]) \cap I[x] \neq 0$ болно. Мөн γ уламжлагдах гэдгээс $0 \neq \gamma(A[x]) \cap I[x] \in \gamma$. Иймд $I \in \nu$ тул $\gamma(I[x]) = (I \cap \gamma(I[x]))[x] \in \gamma$ ба $0 \neq I \cap \gamma(I[x]) \subseteq (\gamma(A[x]) \cap A)\,[x]$. [4] -ийн Өгүүлбэр 1.1.-ийг ашиглавал $(\gamma(A[x]) \cap A)\,[x] = \gamma(A[x])$ болно.

Одоо ν нь уламжлагдах болохыг харуулъя. $I \trianglelefteq A \in \nu$ ба γ нь уламжлагдах радикал байг. Хэрэв $\gamma(I[x]) = 0$ бол батлах зүйл үгүй. Одоо $\gamma(I[x]) \neq 0$ гэж үзье. Тэгвэл ADS нөхцөлөөр $\gamma(I[x]) \subseteq \gamma(A[x]) = (\gamma(A[x]) \cap A)\,[x]$ болох ба мөн $\gamma(I[x]) = (\gamma(I[x]) \cap I)\,[x]$ болж батлагдана. $\square$

[2] -т Я.Кремпа уламжлагдах Амицурын биш цагирагийн жишээ Z_p гэж байгуулсан. Дараах теоремоор уламжлагдах Амицурын биш цагираг хичнээн баялаг болохыг харуулна.

Өмнөх теоремын баталгаан дахь ν -д харгалзах радикалыг $t = U\nu$ гэж тэмдэглэе.

Теорем 2.6. *Радикал t -нь дурын тэг биш анхдагч радикал цагираг бүр нь уламжлагдах Амицурын биш байх ба тусгай радикал болно.*

Баталгаа. Өмнөх теоремаас радикал t нь тусгай радикал болох нь илэрхий. $A \in t$ байх анхдагч цагираг байг. Хэрэв $0 \neq A$ уламжлагдах Амицур цагираг бол $A \in t$, $A \in \nu$ гэдгээс $A \in t \cap \nu = U\nu \cap \nu = 0$ болж харшилна. $\square$

r бүх талбаруудын дээд радикал байг.

Өгүүлбэр 2.7. *$\mathcal{L}_{sp}(J)$ -нь J цагирагаар үүсгэгдсэн тусгай радикал байг. Тэгвэл $[\mathcal{L}_{sp}(J), r]$ интервал дахь дурын радикал γ нь t-радикалтай үл жишигдэнэ.*

Баталгаа. $\gamma \in [\mathcal{L}_{sp}(J), r]$ байх γ нь J-г агуулна. Энэ нь ([3] лемм 3.1) ёсоор $J \notin t$ учраас $\gamma \nsubseteq t$. Харин дурын γ нь Z_p агуулахгүй ба $Z_p \in t$ тул $t \nsubseteq \gamma$. $\square$

Мөрдлөгөө 2.8. *$\mathcal{J}, \mathcal{B}, \mathcal{G}$ гэсэн сонгодог радикалууд нь t -тэй үл жишигдэнэ.*

Ашигласан ном

[1] B.J.Gardner and R.Wiegandt, *Radical Theory of rings*, Marcel Dekker, 2004.

[2] J.Krempa, On Radical Properties of Polynomial Rings, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **20** (1972), 545–548.

[3] L.Marki and R.Wiegandt, Theory of radicals, *Coll. Math. Soci. Janos Bolyai.*, 185–196.

[4] S.Tumurbat and R.Wisbauer, Radicals with the α-Amitsur property, *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol.7, No.3 (2008), 347–361.

ON SOME SPECIAL RADICALS

S.Tumurbat
Department of Mathematics, National university of Mongolia, Mongolia,
e-mail: stumurbat@hotmail.com

Abstract

In this paper we investigate about Amitsur rings, hereditary Amitsur rings, and construct an interesting special radical such that every prime ring $A \in t$ is not hereditary Amitsur ring.