



ЛАТТИС БОЛЬЦМАНЫ АРГААР СҮВЭРХЭГ ОРЧИН ДОТУУРХ ЧӨЛӨӨТГАДАРГУУТАЙ ШИНГЭНИЙ УРСГАЛЫГ ЗАГВАРЧЛАХ

Б.Аюурзана

Нагаока Технологийн Их Сургууль, Япон улс

Цахим шуудан: ayur_426@yahoo.com

Редакцид ирүүлсэн: 2016.02.19

Товч агуулга: Латтис (сүлжээ) Больцманы арга нь тооцон бодох шингэний динамикт чадамж сайтай нэн шинэ арга гэж дүгнэгдэж байна. Энэ өгүүлэлд тэнцвэрт орох нэг хугацаатай нэг төлөвт Латтис Больцманы аргаар шингэний динамикийн бодлогыг хэрхэн тооцон бодохыг харуулав. Квадрат саад тойрч урсах урсгалаар тооцон бодох кодны ажиллагаа болон нарийвчлалыг шалган батлав. Үүний дараа сүвэрхэг орчин дотруурх шингэний урсгалыг загварчлах болон шингэний чөлөөт гадаргууг ойролцоолох алгоритмуудыг хослуулж шингэнээр үл ханасан сүвэрхэг орчин дотруурх шингэний урсгалыг тооцон бодох боломжийг судлав. Латтис Больцманы аргаар шингэний чөлөөт гадаргуутай урсгал, сүвэрхэг орчин дотруурх шингэний урсгал болон турбулент шинж чанартай урсгал гэх мэт тооцон бодох шингэний динамикт хүндрэлтэй шийдэгддэг холимог бодлогыг хялбар техникт алгоритмоор шийдвэрлэх боломжтой гэдгийг энэ өгүүлэлд харуулахыг зорив.

Түлхүүр үг: Шингэний урсгал, Сүвэрхэг орчин, Шингэний чөлөөт гадаргуу, Тоон арга

ОРШИЛ

Тооцон бодох шингэний динамик (ТБШД) буюу шингэний динамикийг тооцон бодох электрон машин ашиглан тоон аргаар ойролцоолж бодох үйл ажиллагаа нь шингэний механик дахь онол, туршилтын аргуудын дараа орох судалгааны гурав дахь арга юм. Шингэний динамикийн хугацаанаас хамаарсан өөрчлөлтийг илэрхийлэх Навьер-Стокесийн дифференциал тэгшитгэлийг ойролцоолох хэлхээст болон чөлөөт гэж ялгагдах боломжтой тоон аргууд ТБШД-т хэрэглэгдэж байна. Эйлэрийн тасралтгүй орчны механикийн талаарх онол дээр суурилж хөгжиж буй аргуудыг хэлхээст арга хэмээх ба үүнд төгсгөлөг ялгаварын (FDM), төгсгөлөг элементийн (FEM),

төгсгөлөг эзлэхүүний арга (FVM) гэх мэт тоон аргууд орно. Харин цэг эсвэл тодорхой биеттэй эгэл хэсэг дээрх орон зай цаг хугацааны өөрчлөлтийн тухай Лагранжийн онолд тулгуурлаж байгаа аргуудыг чөлөөт арга хэмээн үзэх ба тэдгээрт молекул динамик (MD), Монте-Карлогийн арга (MC), эгэл хэсэг ба нүдний арга (PCM), төгсгөлөг цэгийн арга (FPM), салангид элементийн арга (DEM), гөлгөржүүлсэн эгэл хэсгийн гидродинамикийн арга (SPH), хөдөлж буй эгэл хэсгийн хагас илэрхий арга (MPS), чөлөөт элементтэй Галеркины арга (EFG) гэх мэт багтана. Энэ хоёр чиглэлийн аргууд нь харилцан дутагдалаа нөхөлцөж боловсронгуй болсоор байна. Бид энэхүү өгүүлэлд эгэл хэсгийн хөдөлгөөний

дүрслэлээр тайлбарлагдах боловч тодорхой торон дээр тухайлан бодогдох хэлхээст

арга болох Латтис Больцманы аргын онол, хэрэглээний талаар авч үзнэ.

ЛАТТИС БОЛЬЦМАНЫ АРГЫН ТУХАЙ

Аргын үүсэл хөгжил

Эсийн автомат болон хийн хөдөлгөөнийг дүрсэлсэн сүлжээ хоёрын нэгдэл болох микро хэмжээст арга нь Латтис Больцманы аргын өмнөх үе юм. Хийн сүлжээний автоматын аргад [1] жигд сүлжээн дээрх хийг төлөөлөх эгэл хэсгүүд нь физикийн үндэслэлтэй тодорхой дүрмээр сүлжээний өгөгдсөн чиглэлийн дагуу хөдлөх ба өөр нэг хийн эгэл хэсэгтэй мөргөлдөж чиглэлээ мөн дүрмийн дагуу өөрчлөх маягаар хийн урсгалыг загварчилдаг боловч үндсэн хэмжигдэхүүн болох Боолеаний хэмжигдэхүүнээс үүдэлтэй статистик шуугиан гарах, Галилейн инвариант зөрчигдөх, хурд ба даралтын орон хоорондоо хамааралгүй байх [2] гэх мэт дутагдалуудтай байжээ. Эдгээр дутагдалыг арилгахад Боолеаны хэмжигдэхүүний оронд бодит тоогоор илэрхийлэгдэх түгэлтийн функцийг авч үзэж, гол алгоритм болох урсах болон мөргөлдөх алхамуудыг тухайлсан Больцманы тэгшитгэлээр гүйцэтгэж болохыг McНамара болон Занетти нар 1988 [3] онд дэвшүүлсэнээр

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau} + \Delta t F_i \quad (1)$$

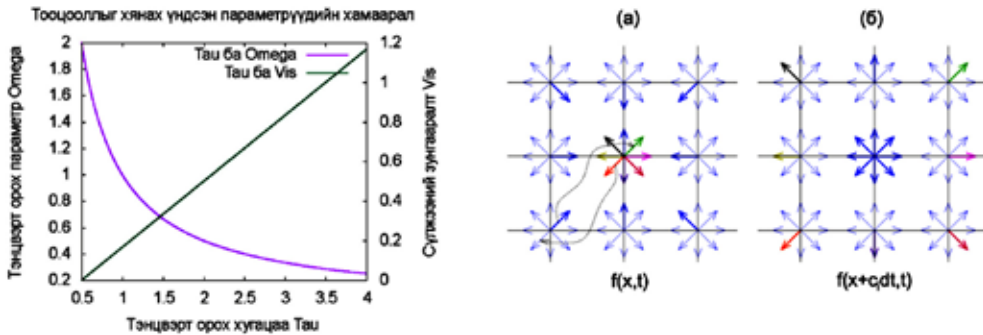
болно. Үүнд: $f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t)$ нь $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$ байрлалд байх $t + \Delta t$ хугацаан дахь түгэлтийн функц, $f_i(\mathbf{x}, t)$ нь x байрлалд байх t хугацаан дахь түгэлтийн функц, $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ нь шийдлийг тэнцвэрийн төлөврүү чиглүүлэх тэнцвэрт түгэлтийн функц, $\tau (= 3v + 1/2)$ нь тэнцвэрт оруулах хэмжээсгүй хугацаа, F_i нь хүчний илэрхийлэл, i нь сүлжээний чиглэлийн дугаар (зураг 4в) зэрэг болно. Түгэлтийн функцууд нь шингэний молекулын түгэлтийг, харин мөргөлдөөний илэрхийлэл нь тэдгээрийн харилцан үйлчлэлийг харуулах ба уг операторыг ойролцоолох

Латтис Больцманы аргын өнөөгийн эхлэл тавигдсан байна.

Шингэний урсгалын загвар

Латтис Больцманы аргад (цаашид ЛБА гэх) шингэн нь төсөөллийн эгэл хэсгээр дүрслэгдэх ба эдгээр нь өгөгдсөн чиглэлийн дагуу хөдөлж хөршийнхөө байрлалд очиж зураг 1-ийн а ба б-д харуулсан шиг мөргөлдөнө. Энэ нь аргын кинетик байдлыг илэрхийлэх ба урсах (өгөгдсөн чиглэлийн дагуу хөдлөхийг цаашид урсах гэнэ) болон мөргөлдөх явцдаа момент, масс хадгалагдах зэрэг шингэний хөдөлгөөний чухал физик хуулиудыг хангана. Статистик механик дахь дулааны Больцманы тэгшитгэлийн гадаад хүчний илэрхийллийг гэж сүлжээн дээр ойролцоолсныг сүлжээний Больцманы тэгшитгэл гэж нэрлэнэ. Уг тэгшитгэл кинематик шинжтэй учир шингэний динамикийг дүрслэхийн тулд хүчний илэрхийллийг ойролцоолсон мөргөлдөөний оператор дээр нэмж өгнө. Ингээд динамик шинжтэй сүлжээний Больцманы тэгшитгэлийг бичвэл

нь бэрх юм. Мөргөлдөөний операторын ойролцооллоос хамааруулж ЛБА-ыг тэнцвэрт орох нэг хугацаатай схем (BGK), тэнцвэрт орох хоёр хугацаатай схем (TRT), тэнцвэрт орох олон хугацаатай схем (MRT) гэж ангилж [2] болно. Энэ өгүүлэлд бид тэнцвэрт орох нэг хугацаатай схемийг (тэгшитгэл 1) жигд торон дээр тухайлсан ЛБА аргыг хэрэглэнэ. Мөн ЛБА нь тухайлах торны геометрийн хэлбэрээс хамаарч жигд (квадрат тор) ба жигд бус (торны хэвтээ ба босоо алхам харилцан адилгүй) торны ЛБА, мөн сүлжээний байгуулалтаас хамаарч олон байдлаар ангилагдаж болно.



Зураг 1. Эхний график нь тэнцвэрт орох параметр болон хэмжээсгүй зунгааралт хоёрын тэнцвэрт орох хугацаатай хамаарах хамаарлыг харуулна. Удаах зургийн (а)-д мөргөлдөөний дараах түгэлтийн функцуудын байрлал, нүүх чиглэлийг сумтай тасархай зураасаар дүрслэн харуулсан ба (б)-д урсах алхмын дараах түгэлтийн функцуудын байрлалыг харуулна. Торны зангилаа бүр дээрх 8 чиглэлд заасан сум бүр нь түгэлтийн функцууд бөгөөд тод өнгөөр дүрсэлсэн сумнууд нь урсаж, мөргөлдөж байгааг харуулсан түгэлтийн функцууд болно.

Түгэлтийн функц Δt хугацааны тухайлсан хурд нь 2 хэмжээст, 9 чиглэлтэй алхамтайгаар сүлжээний чиглэлийн (D2Q9 сүлжээний байгуулалт, зураг 4в) дагуу c_i тухайлсан хурдтайгаар урсах ба жигд торон дээр

$$c_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ c \left(\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{4}\right) \right), & i = 1 \div 4 \\ \sqrt{2} c \left(\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{4}\right) \right), & i = 5 \div 8 \end{cases} \quad (2)$$

гэж өгөгдөнө. Үүнд: $c = \Delta x / \Delta t$ нь сүлжээний хурд, Δx нь торны алхам болно. Физик хэмжигдэхүүний шинж чанарыг мезо-орчинд үнэн зөв илэрхийлэхийн тулд тэнцвэрт түгэлтийн функцын зөв томъёог тодорхойлох хэрэгтэй ба шингэний урсгалын хурдны оронд Максвеллийн

түгэлт тохирдог байна. Максвеллийн түгэлтийн функцыг Тэйлорын цуваанд задалж өндөр эрэмбийн гишүүдийг орхиж Навьер-Стокесийн тэгшитгэлийг мезо-орчинд хангах сүлжээний Больцманы тэгшитгэлийн тэнцвэрт түгэлтийн функцыг [4]

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(c_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2} \right] \quad (3)$$

байхаар тодорхойлжээ. Үүнд: w_i нь сүлжээний жинлэх итгэлцүүр (D2Q9 байгуулалтын хувьд $i=1,2,3,4$ үед $w_i = 4/9$, $w_i = 1/9$ харин $i=5,6,7,8$ үед $w_i = 1/36$), $c_s (= 1/\sqrt{3} = 1/\sqrt{RT})$ нь сүлжээний дууны

хурд, R ба T нь хийн тогтмол ба температур, ρ ба u нь мезо-орчны шингэний нягт ба урсгалын хурд бөгөөд тэдгээрийг түгэлтийн функцуудын тэг ба нэгдүгээр эрэмбийн моментын нийлбэрээр илэрхийлбэл

$$\rho = \sum_{i=0}^N f_i, \quad \rho u = \sum_{i=0}^N c_i f_i \quad (4)$$

болно. Энд бид D2Q9 сүлжээний байгуулалт хэрэглэж байгаа учир $N=8$ байна. Хоёрдугаар эрэмбийн моментын нийлбэр нь мезо-орчны шүргэх хүчдэлийг илэрхийлдэг.

$$F_i = w_i \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left[\frac{c_i \cdot F}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u}F : (c_i c_i - c_s^2 \mathbf{I})}{c_s^4} \right] \quad (5)$$

гэж илэрхийлэгдэнэ. Үүнд: F нь хүчний вектор ба хүндийн хүчний хувьд ρg , g нь хүндийн хүчний хурдатгал, \mathbf{I} нь нэгж матриц байна. Хүчний энэ схемийг хэрэглэх

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i c_i f_i + \frac{\Delta t}{2} F \quad (6)$$

хэлбэртэй болно. Максвеллийн түгэлтийн функцтай сүлжээний Больцманы тэгшитгэлийг олон хэмжээст Чапман-Энскогийн задаргаагаар задалж Махын бага тоотой байх нөхцөлийг авч үзсэнээр үл шахагдах шингэний Навьер-стокесийн тэгшитгэлийг макро-орчинд гарган авч болох [2] ба энэ нь уг ЛБА-ын шингэний динамикийн шинж чанарыг 2-р эрэмбийн нарийвчлалтай тодорхойлох боломжтой гэж үзэх баталгаа болдог. Үл шахагдах

Турбулент урсгалыг загварчлах

Тоон шийдлийн тогтворгүйжилтээс болж ердийн ЛБА-ын шийдэл нь ламинар урсгалд тохирно. Гэтэл шингэний динамикийн ихэнх урсгал турбулент шинж чанартай байх учир ЛБА-ын тоон шийдлийн савлалтыг багасгах шаардлага гарч ирнэ. Турбулент урсгалыг ЛБА-д загварчлахын

$$\tau_{total} = 3(v + C\Delta^2|\bar{S}|) + \frac{1}{2} \quad (7)$$

тэнцвэрт орох хугацааг хэрэглэнэ. Энд C нь Смагоринскийн тогтмол (0.1–ээс 0.2–ын хооронд), Δ -дэд торны хэмжээс (ихэвчлэн торны алхмуудын геометр дунджаар

$$|\bar{S}| = \frac{\sqrt{v^2 + 18C\Delta^2(\Pi_{xy}\Pi_{xy})^{1/2}} - v}{6C\Delta^2} \quad (8)$$

Биеийн болон гадны хүч тооцох хэд хэдэн схем байх ба энэ өгүүлэлд тэнцвэржүүлж нэмэх аргачлалыг ашигласан болно. Хүч нь сүлжээний чиглэлүүдэд

үед мезо-орчны хурданд Ньютоны 2-р хуулийн зарчмаар хүчийг нэмж өгдөг. Иймд тэгшитгэл (4)-ийн хурд өөрчлөгдөн

шингэний хувьд даралт нь $p = c_s^2 \rho$ гэсэн төлөвийн тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэнэ. Уг задаргаагаар тэнцвэрт орох хугацаа нь шингэний хэмжээсгүй зунгааралттай шугаман хамаарлаар илэрхийлэгдэх ба утгын доод хязгаар нь 0.5 байна (зураг 1). Тэнцвэрт орох хугацаа нь доод хязгаартаа дөхөх тусам урсгал турбулент шинжтэй болж аргын тоон шийдэл тогтворгүй болж ирнэ.

тулд том хуйлралтын шинжилгээний нэг арга болох Смагоринскийн дэд торны хэмжээст [5] аргыг өргөн ашиглаж байна. Смагоринскийн загварт турбулент зунгааралтыг моментын зунгааралт дээр нэмж тооцох ба тэгшитгэл (1)-ийн тэнцвэрт орох хугацааны оронд өргөтгөсөн

илэрхийлэгдэнэ), \bar{S} нь сунах хүчдэлийн утга ба өндөр эрэмбийн хурдны нөлөөллийг үл тооцвол



гэж илэрхийлэгдэнэ. Үүнд: Π_{xy} нь тэнцвэрт бус хүчдэл бөгөөд ЛБА-д тэнцвэрт

$$\Pi_{xy} = \sum_{i=0}^N c_{ix} c_{iy} (f_i - f_i^{eq}) \quad (9)$$

бус түгэлтийн функцуудын хоёрдугаар эрэмбийн моментуудын нийлбэрээр

гэж тооцогдоно. Турбулент загварчилалыг агуулсан ЛБА-ын урсах ба мөргөлдөх алхмуудыг Урсах алхам: $f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t) = f_i(\mathbf{x}, t)$, (10)

$$\text{Мөргөх алхам: } f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_{total}} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (11)$$

гэж гүйцэтгэнэ.

Шингэний чөлөөт гадаргууг ойролцоолох алгоритм

Үл холилдох хоёр шингэний хоорондох харилцах үеийг нарийн тодорхойлох шаардлага олон тохиолддог. Энэ нь хоёр ба түүнээс дээш төлөвт/бүрэлдэхүүнт шингэний урсгалын хувьд чухал асуудал бөгөөд хэлхээст аргад шингэний эзлэхүүний аргыг (VoF) ихэвчлэн хэрэглэдэг. Харин чөлөөт аргад тусгай техник, алгоритм шаардлагагүй байдаг нь энэ төрлийн аргын давуу тал юм. ЛБА-д шингэний эзлэхүүний аргын үндсэн санааг хэрэглэж шингэн ба хий гэх мэт хэт их нягтын ялгаатай урсгалын шингэн хоорондын харилцах үеийг хялбархан шийдэх нэг

төлөвт алгоритм боловсруулагдсан байна. Уг арга нь зөвхөн шингэнийг тооцох ба хийн шингэн дээрх үйлчлэлийг хязгаарын нөхцөлийн тусламжтайгаар шийдвэрлэж өгдөг. Шингэний масс $m(\mathbf{x}, t)$ болон шингэний фракц $\epsilon(\mathbf{x}, t) (= m(\mathbf{x}, t) / \rho(\mathbf{x}, t))$ хэмээх хоёр нэмэлт хэмжигдэхүүн ЛБА-д тодорхойлогдох ба шингэний фракц $\epsilon(\mathbf{x}, t) = 1$ бол тухайн байрлалд шингэний нүд байна. Харин $\epsilon(\mathbf{x}, t) = 0$ бол тухайн байрлалд хийн нүд байх ба хөрш хажуу байрлалд $0 < \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) < 1$ утгатай нүд байвал уг нүдийг харилцах үеийн нүд гэж нэрлээд энэ чиглэл дахь хийн нүднээс ирэх түгэлтийн функцыг

$$f_i'(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^{eq}(\rho_A, \mathbf{u}) + f_i^{eq}(\rho_A, \mathbf{u}) - f_i(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

гэсэн хязгаарын нөхцөлийн тусламжтайгаар тодорхойлох ба энд байгаа ρ_A нь хийн төлөвийн нягт, \bar{t} нь i чиглэлийн эсрэг чиглэлийг илтгэх болно. Тухайбал, зураг 4в-д 7-ийн эсрэг нь 5 байна. Харилцах үеийн нүд нь бөөр бөөрөөрөө нийлсэн тасралтгүй үргэлжлэх дан үеэр илэрхийлэгдэх ба бүх тооцооллын туршид уг чанараа хадгалах хэрэгтэй. Харилцах үеийн нүд нь хөрш шингэн болон харилцах үеийн нүднүүдтэйгээ масс хадгалагдах хуулийг хангасан масс солилцоонд орно. Үүний дараа харилцах үеийн нүдний масс нь тухайн нүдний нягтаас илүү гарсан тохиолдолд шингэний нүд болж, харин масс нь 0-ээс доош орсон тохиолдолд

хийн нүд болох жамаар шингэний чөлөөт гадаргуугийн хөдөлгөөн явагдана. Илүү дэлгэрэнгүй алгоритмын тайлбарыг [6] болон [7] зэргээс дэлгэрүүлж болох ба энд зөвхөн үндсэн санааг нь дурьдав.

Сүвэрхэг орчин дотуурх урсгалыг загварчлах алгоритм

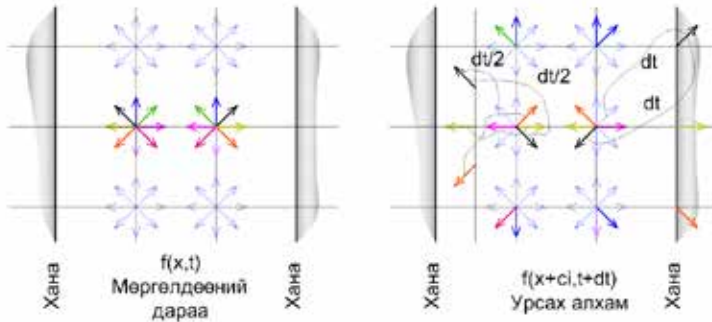
Сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний урсгал нь байгальд болон үйлдвэрлэлд ихээхэн тохиолддог шингэний динамикийн чухал бодлогуудын нэг юм. Уг бодлогыг ЛБА-д хоёр янзаар шийдвэрлэх боломжтой ба эдгээрийг нүх сүвний хэмжээст (PS) ба эзлэхүүний элементар төлөөллийн (REV) аргачлал [2] гэж ангилна. Нүх сүвний хэмжээст аргачлал гэдэг нь сүвэрхэг

орчинг бүрдүүлэгч хатуу хэсэгт хязгаарын нөхцөлийг нэг бүрчлэн оногдуулснаар энгийн ЛБА шиг тооцох аргыг хэлнэ [8]. Геометрийн хүндрэлтэй бодлогод маш тохиромжтой гэх ЛБА-ын энэхүү давуу

талыг энэ төрлийн бодлогод ашиглана. Хатуу биед оногдуулах үл гулсах хязгаарын нөхцөлийн буцааж ойлгох схемийг зураг 2-г дүрсэлсэн ба

$$\begin{aligned} \text{Хагас зам: } f_i(x, t + dt) &= f_i'(x, t), \\ \text{Бүтэн зам: } f_i(x, t + dt) &= f_i(x, t + dt) \end{aligned} \tag{13}$$

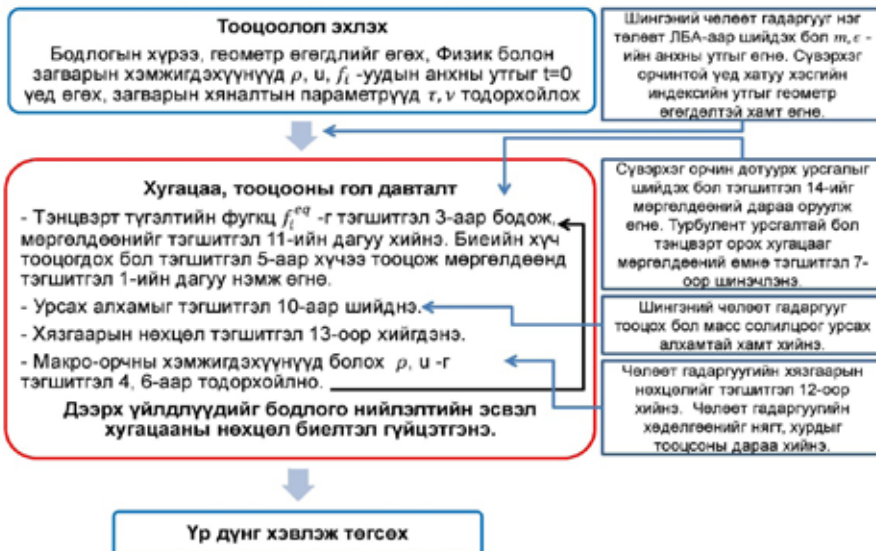
гэж томъёолж болно.



Зураг 2. Үл гулсах хязгаарын нөхцөлийн хувилбарууд. Зүүн талд хагас замын ойлт, баруун талд бүтэн замын ойлтын аргыг хоёр дахь зурганд дүрслэн харуулсан байна.

Харин сүвэрхэг орчин нь маш гөлгөр, шингэний урсгалын моментод үйлчлэл үзүүлэхгүй бол чөлөөт гулсалттай хязгаарын нөхцөлийг өгөх ба энэ нь толин ойлтын зарчмаар шийдэгдэнэ.

Нүх сүвний хэмжээст аргачлал нь жижиг масштабнаас нано хүртэлх сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний хөдөлгөөнийг судлахад тохиромжтой байх ба хэмжээс томорход үр ашиг буурдаг.



Зураг 3. ЛБА-ын ерөнхий тооцон бодох алгоритм дээрх сүвэрхэг орчинг тооцох болон чөлөөт гадаргууг ойролцоолох алгоритмуудын оруулга.

Том хэмжээт сүвэрхэг орчны урсгалыг загварчлахад эзлэхүүний элементар төлөөллийн хоёр өөр аргачлал ашиглагдаж байгаа ба эдгээр нь орчны сүвэрхэгшилтэнд суурилсан [9] эсвэл хатуу хэсгийн индекс суурилсан [10] байна. Сүвэрхэгшилтэнд суурилсан арга нь хүч болон тэнцвэрт түгэлтийн функц зэргэд сүвэрхэгшилтийн нөлөөллийг Дарсийн эсэргүүцлийн хуулийн

$$\text{Мөргөлдөх алхам: } f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i^*(\mathbf{x}, t)), \quad 0 \leq i \leq 8 \quad (14)$$

$$\text{Магадлалт түгэлт: } f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + n_s [f_i^{**}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t) - f_i^{**}(\mathbf{x}, t)], \quad 1 \leq i \leq 8$$

гэж нэмж гүйцэтгэнэ. Үүнд: $n_s (= 1 - \epsilon)$ нь хатуу хэсгийн индекс ба ϵ нь материалын сүвэрхэгшилт болно. Түгэлтийн функцын дээрх нэг од (*) нь урсгалын дараах, хоёр од нь мөргөлдөөний дараах гэсэн утгыг илтгэнэ. Хэрэв шингэний чөлөөт гадаргууг

дагуу оруулж өгнө. Харин хатуу хэсгийн индекс суурилсан арга нь магадлалт ойлгыг бий болгох нэмэлт алхмыг ЛБА-д бий болгоно. Урсах алхмын дараа мөргөлдөх алхам байх ба мөргөлдсөний дараа хатуу хэсгийн индексийн нөлөөллөөс хамаарч моментийн эрч сааруулах магадлалт түгэлтийн илэрхийллийг

тооцох бол тэгшитгэл 14 нь харилцах үеийн нүдэнд тохирохгүй болох ба энэ тохиолдолд $f_i^{**}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t)$ -ийн оронд харилцах үеийн нүдэн дахь мөргөлдөөний дараах түгэлтийн $f_i^{**}(\mathbf{x})$ функцыг хэрэглэнэ.

ТООЦОН БОДОЛТЫН ҮР ДҮН

Дээр тайлбарласан ЛБА, түүний зарим загварчлалуудыг ашиглан тодорхой бодлогуудыг бодсон үр дүнгээс танилцуулъя. Тооцон бодох хоёр хэмжээт (x, y тэнхлэгт) кодыг зураг 3-т харуулсан алгоритмын дагуу цуваа ажиллагаатай байхаар програмчлалын Фортран хэл дээр бичсэн ба тооцооллыг суурин компьютер дээр хийсэн болно. ЛБА-ын мөргөлдөөн (тэгшитгэл 11), макро орчны хэмжигдэхүүнүүдийг тодорхойлох (тэгшитгэл 4,6) гэх мэт ихэнх үйлдлүүд орчны шинж чанартай учир параллель байдлаар кодлоход маш тохиромжтой

байдаг. Параллель тооцоолол хийснээр CPU хугацаагаар бол 4-40 дахин хурдан тооцоолох боломжтой байдаг.

Саад тойрч урсах шингэний бодлого

Тооцон бодох кодыг батлах, зөв ажиллаж байгаа эсэхийг жиших бодлогуудыг гидравликт жишиг бодлого гэнэ. Янз бүрийн хэлбэртэй саадуудыг тойрч урсах урсгал нь практикт өргөн тааралдах ба тооцон бодох шингэний динамик дахь түгээмэл жишиг бодлого юм. Энд квадрат саад тойрч урсах (зураг 4) урсгалыг тооцон бодож үр дүнг өөр аргуудаар бодсон үр дүнтэй харьцуулж жишив.



Зураг 4. а) Бодлогын геометр, хурд хэмжих тэнхлэгүүдийн байршил, б) Квадрат саадан дээрх даралтын эсэргүүцлийн коэффициентыг хэмжих чиглэл, в) $D/2Q9$ сүлжээний байгуулалт, тухайлсан хурднуудын чиглэл

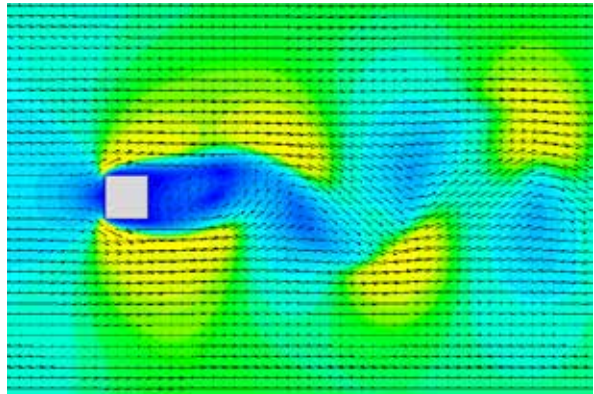
Бодлогыг Рейнольдсын тоо $Re=100$ байх үед энгийн ЛБА (тэнцвэрт орох хугацаа засваргүй) болон өргөтгөсөн ЛБА-аар (тэнцвэрт орох хугацаа тэгшитгэл 7-оор засварлагдах), өндөр Рейнольдсын тоотой үед өргөтгөсөн ЛБА-аар тооцов.

ЛБА нь мезо-орчны шинжтэй учир бодит физик үр дүнг гаргаж авахын тулд төсийн чанарыг ашиглана. Энэ бодлогын хувьд Рейнольдсын болон Струхалын тоонууд нь ЛБА болон бодит орчинд тэнцүү байх ёстой гэсэн төсийг ашиглах ба илэрхийлбэл

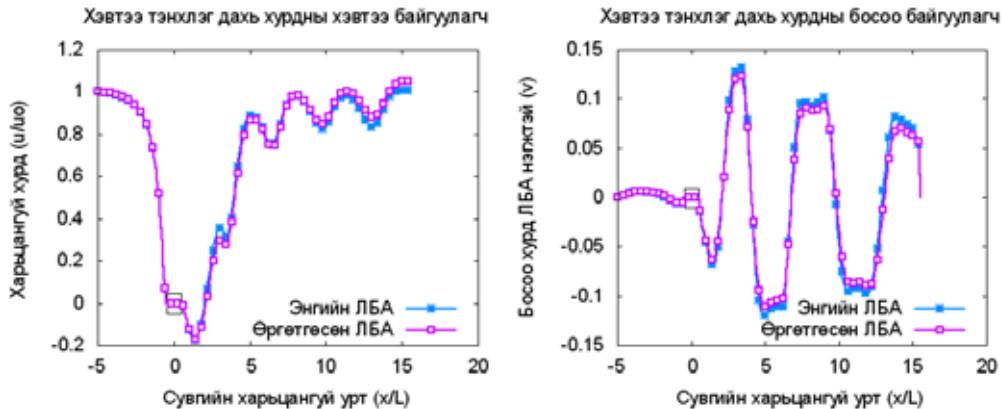
$$Re_{\text{бодит}} = Re_{\text{ЛБА}} = \frac{3u_0 D}{\tau - 0.5}, \quad St_{\text{бодит}} = St_{\text{ЛБА}} = \frac{fD}{u_0} \quad (15)$$

байна. Энд: u_0 характеристик хурд, D нь характеристик урт, f нь хуйлралтын хэлбэржилтийн давтамж юм. Урсгалын хуйлралт нь саадны орчим дахь урсгалын шинж чанарыг сайн илтгэх учир хуйлралтыг лавлах [11]-ийн үр дүнтэй харьцуулахад адилхан хэлбэржилтийг харуулж байв (зураг 5). Харьцуулж буй судалгаанд [11] даралтын эсэргүүцлийн коэффициент 1.35 болон Струхалын тоо болон 0.14 байсан бол бидний судалгаанд эдгээр нь тус бүр 1.27 болон 0.15 гарч байгаа нь ойролцоо үр дүнг өгч байна гэж дүгнэж болно. Адил

бага Рейнольдсын тоотой үед энгийн болон өргөтгөсөн ЛБА-аар бодлогыг бодож зөвхөн хэвтээ тэнхлэг дахь хурднуудыг харьцуулж зураг 6-д харуулав. Энгийн болон өргөтгөсөн ЛБА-ын тооцоонуудын хооронд турбулент зунгааралтын нөлөөгөөр хэвтээ тэнхлэгийн дагуу (зураг 6) хурдны утга босоо байгуулагч хамгийн ихдээ 5.99×10^{-02} , хэвтээ байгуулагч 2.24×10^{-02} -ын зөрүүтэй байв. Хэмжээсгүй хурдан дээр гарах энэ зөрүүг хүлээн зөвшөөрөх утга гэж үзсэн болно.



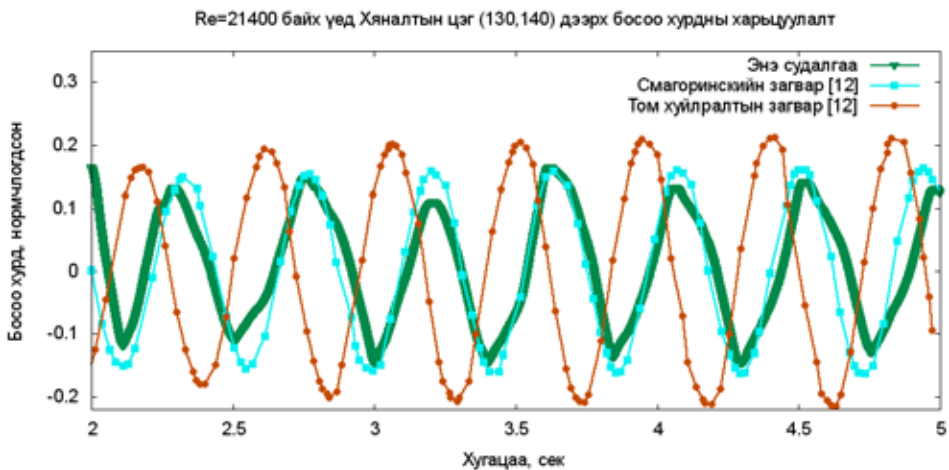
Зураг 5. Эхний зурагт хуйлралтын онрг төгсгөлөг элементийн аргын [11] үр дүнтэй харьцуулав. Удаах зурагт уг тооцооны хурдны утга болон вектор онрг харуулав.



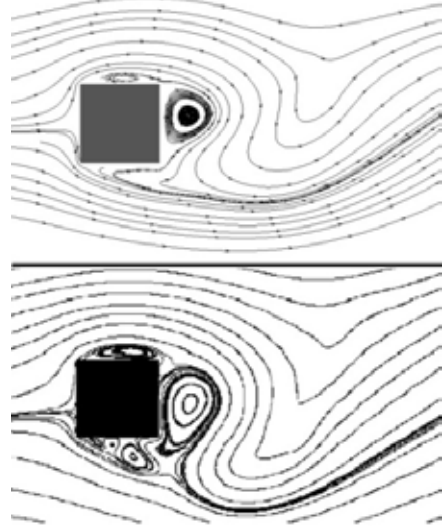
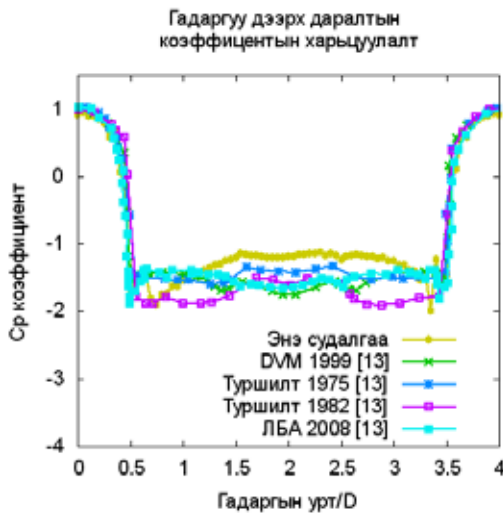
Зураг 6. ЛБА-ын Тэнгийн=24000, Төргөтгөсөн=23780 хугацаан дахь хэвтээ тэнхлэг дахь хурдны муруй. Өргөтгөсөн ЛБА-д тэнцвэрт орох хугацаа дэд торны хэмжээст загварчлалаар засварлагдаж байгаа учир хугацааны хоёр өөр утганд тооцооны үр дүн ижил байна.

Өндөр Рейнольдсын тоотой үед код хэрхэн ажиллахыг харахын тулд $Re=21400$, 22000 гэсэн утгуудад тооцооллыг хийж лавлах материалуудын үр дүнтэй зохих харьцуулалтыг хийв. Өндөр Рейнольдсын тоотой үед өөр өөр турбулент загвар хэрэглэснээс болж харилцан адилгүй үр дүн гаргаж авч болохыг зураг 7 – оос харж болно. Бидний хувьд ЛБА-ын Смагоринскийн загвар (зураг 7 тод ногоон муруй) нь төгсгөлөг ялгаварын аргын Смагоринскийн загвартай (зураг 7 тод цэнхэр муруй) ойролцоо байгаа

нь тооцоолол үндэслэлтэй хийгдсэнийг харуулж байна. Харин даралтын эсэргүүцлийн коэффициентийн хувьд ялимгүй зөрүүтэй утгыг зураг 8-д В цэгээс С цэг хүрэх орчимд үзүүлж байна. Урсгалын шугамын харьцуулалтыг харвал торны нарийвчлалыг өсгөхөд лавлахтай ойролцоо жижиг хуйлралтыг саадны орчимд гаргаж авах боломжтой гэдэг нь ойлгомжтой байна (зураг 8). Бид боловсруулсан кодоороо уг бодлогыг $Re=3 \times 10^5$ хүртэл тооцон бодсон ба энэ орчимд үр дүнг харьцуулах судалгаа, тооцооны материал одоогоор хомс байна.



Зураг 7. Саадны арын хяналтын цэг дээрх хурдны утгыг бусад төгсгөлөг ялгаварын өндөр эрэмбийн аргаар [12] бодсон үр дүнтэй харьцуулсан нь. Уг хяналтын цэг нь харьцуулалт хийхэд маш тохиомжтой цэг болно.

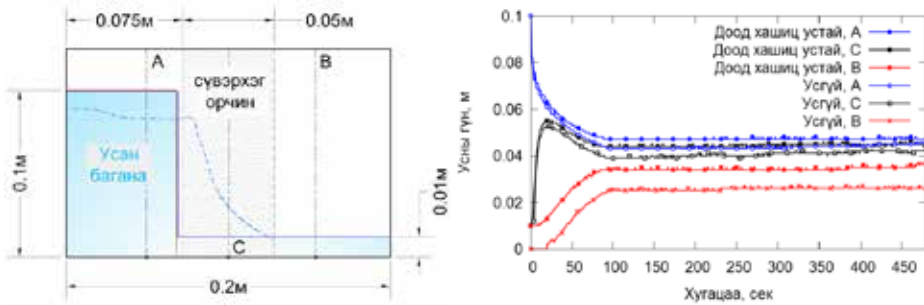


Зураг 8. Рейнольдсын тоо $Re=22000$ байх үеийн даралтын эсэргүүцлийн коэффициент, болон урсгалын шугамын харьцуулалт. Дээд талын урсгалын шугам нь бидний тооцооны үр дүн ба доод талд байх үр дүнг [13] –аас авсан болно.

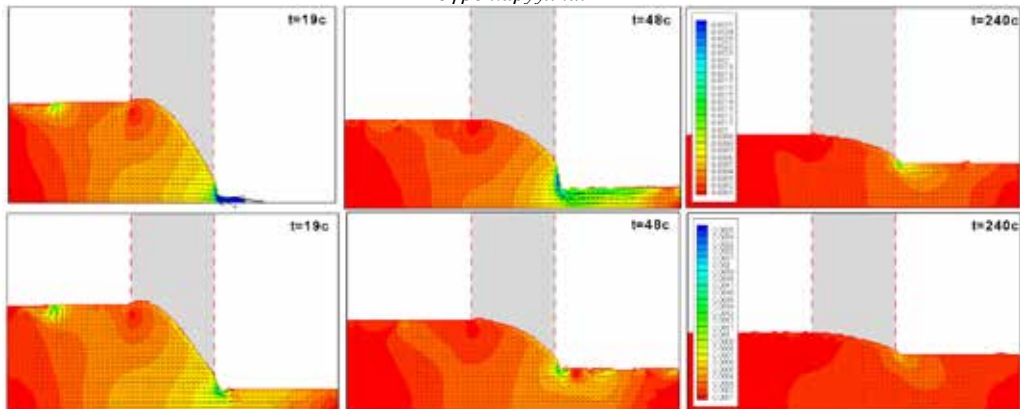
Сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний урсгал

Сүвэрхэг орчинд чөлөөт гадаргуутай шингэний урсгалыг нэг төлөвт ЛБА-аар тооцон бодсон эрдэм шинжилгээний ажил одоогоор үгүй байна. Чөлөөт гадаргууг ойролцоолох алгоритмыг боловсруулсан кодны баталгааг усан баганын задралын шинжилгээ болон ус халиагуур дээгүүрх усны урсгалын шинжилгээ зэргээр [7] хийсэн болно. Харин сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний урсгалыг загварчлах кодны баталгааг шингэнээр бүрэн ханасан анхны нөхцөлтэй Пуазейлийн урсгал, хөндийн урсгал болон санамсаргүй түгэлтээр байгуулагдсан сүвэрхэг суваг дотуурх урсгал [8] зэрэг бодлогуудыг бодож хийсэн юм. Сүдалгаанд 0.2×0.12 м хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд байрласан 0.05 м-ийн хэмжээтэй нэгэн төрлийн $\epsilon=0.2$ сүвэрхэгшилттэй саадыг доод хэсэгтээ устай ба усгүй байхаар (зураг 9) 500 секундын турш тооцон бодов. Доод талдаа усгүй тохиолдолд усан баганын задралын

энергийг эхний 96 сек хүртэл сүвэрхэг орчин дотуур шингэн эрчимтэй шүүрч байгаад ус доод хашицад суллагдан усны түвшин 0.02 м орчимд хүрсэнээр шүүрэлтийн эрчим багасаж улмаар 230 секундээс улам бүр багасаж бараг тэнцвэрийн төлөвт орж байв. Ус анхны байрлалаас 15.36 сек дараа сүвэрхэг сааднаас доод хэсэгрүү гарч байна. Харин доод хашицтай устай тохиолдолд шүүрэлтийн эрчмийг ихэсгэж 6.72 сек дотор доод талд байх усны түвшин өргөгдөж эхэлнэ. Шүүрэлтийн анхны эрчим 78 сек орчимд очоод удааширч (зураг 9), цаашид бага хэмжээтэйгээр шүүрэлт үргэлжилнэ. Сүвэрхэг орчин дотуурх усны түвшин доод хашиц дахь усны түвшнөөс хамаарч байгаа нь харагдаж байна. Хоёр хувилбарын урсгалын хурдыг харьцуулбал доод хэсэгтээ устай тохиолдолд хурд дунджаар 0.003 м/с орчим бага байна (зураг 10).



Зураг 9. Бодлогын нөхцөл нь доод талдаа устай ба усгүй гэсэн хувилбартай байна. Хоёр дахь графикт А, С, В цэгүүд дээрх усны түвшний хугацаанаас хамаарсан хэмжилтийг хувилбар тус бүрд харуулна.



Зураг 10. Тооцооны зарим хугацаан дахь усны урсгалын хурдны утга, хурдны вектор, усны чөлөөт гадаргуу зэргийг хамт харуулав.

ДУГНЭЛТ

Энэхүү өгүүлэлд ЛБА-ын тухай ерөнхий тайлбарлаж, өөрсдийн боловсруулсан хоёр хэмжээст тооцон бодох кодыг батлах зорилгоор квадрат саад тойрч урсах шингэний урсгалыг ламинар болон турбулент горимд бодож үр дүнг зохих лавлахуудын үр дүнтэй харьцуулав. Шингэний урсгалын бүтцийн хувьд ялгаагүй үр дүнг харуулах боловч нарийвчилсан тоон хэмжигдэхүүн дээр ялимгүй зөрөөг өгч байв. Урсгалын шилжилтийн горимд турбулент загварчлалын нөлөө загварт бага хэмжээгээр орж байгаа нь энгийн ба өргөтгөсөн ЛБА-ын нормчилсон хурдны утгуудын зөрүүнээс харагдана. Ламинар болон турбулент урсгалтай үед тооцооны үр дүн лавлахуудын үр дүнтэй

ойролцоо байсан нь тооцоолол бодитой гэдгийг харуулж, кодыг батлаж байгаа юм. Батлагдсан кодонд шингэний чөлөөт гадаргууг тодорхойлох болон сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний урсгалыг тооцох алгоритмуудыг шинээр нэгтгэж боловсруулсанаар шингэнээр үл ханасан сүвэрхэг орчин дотруух шингэний урсгалыг хэрхэн тооцохыг жишээ болгон харуулав. Дээрх хоёр алгоритмыг нэгтгэсэн нь энэ судалгааны ажлын онцлог болж байгаа юм. Урт хугацааны тооцоонд сүвэрхэг орчныг шийдэх магадлалт түгэлтийн алхам нь хөрш зангилааны шинж чанараас хамаарч байгаа учир шингэний чөлөөт гадаргууд массын алдагдал үүсгэж магадгүй. Иймд орчны шинж чанартай сүвэрхэг орчинг

загварчлах алгоритмыг урт хугацааны тооцоололд хэрэглэх хэрэгтэй. ЛБА-аар том хэмжээст бодлогыг бодоход тооцоолох хугацаанаас гадна, санах ойн багтаамж их шаардахаар байгаа нь судалгааны үед ажиглагдсан болно. Тухайлбал дээрх энгийн сүвэрхэг орчны тооцоог 2 цаг орчим тооцон

бодож (1секундын доторхи үзэгдлийг тодорхойлохын тулд 15 секундэнд бодох) байгаа учир тооцоололд хурдасгуур (GPU технологи), кодонд параллель зарчмыг хэрэглэн практик бодлогуудыг шийдвэл үр ашигтай байх болно.

Ашигласан бүтээлийн жагсаалт

1. U.Frisch, B.Hasslacher and Y.Pomeau, "Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation," *Physical Review Letters*, vol. 56, no. 14, pp. 1505-1508, 1986.
2. Z. Guo and C. Shu, *Lattice Boltzmann Method and its Applications in Engineering*, Singapore: World Scientific, 2013.
3. G. McNamara and G. Zanetti, "Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata," *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 20, pp. 2332-2335, 1988.
4. A.A.Mohamad, *Lattice Boltzmann Method, Fundamentals and Engineering applications with Computer codes*, London: Springer, 2011.
5. S. Hou, J. Sterling, S.Chen and G. D. Doolen, "A Lattice Boltzmann Subgrid Model for High Reynolds Number Flows," *arXiv:comp-gas/9401004v1*, p. 18, 1994.
6. N. Thurey, "Physically based Animation of Free surface Flows with the Lattice Boltzmann Method," *University of Erlangen-Nuremberg, Erlangen*, 2007.
7. A. Badarch and H. Tokuzo, "Hydraulics application of the Free-surface Lattice Boltzmann method," *submitted to IFOST 2016 conference, Novosibirsk*, 2016.
8. Б. Аюурзана and Э. Тунгалагтамир, «Сүвэрхэг орчин дотуурх шингэний урсгалыг тооцон бодох,» in *Монгол орны гидрогеооги, инженер геологи, геоэкологийн асуудлууд №23, Улаанбаатар хот*, 2015.
9. Z. Guo and T. Zhao, "Lattice Boltzmann model for Incompressible flows through porous media," *Physical Review E*, vol. 66, p. 036304, 2002.
10. O. Dardis and J. McCloskey, "Lattice Boltzmann scheme with real numbered solid density for the simulation of flow in porous media," *Physical Review E*, vol. 57, no. 4, pp. 4834-4837, 1997.
11. M. Breuer, J.Bernsdorf, T.Zeiser and F.Durst, "Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice Boltzmann and finite-volume," *Internation Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 21, pp. 186-196, 2000.
12. J.S.Ochoa and N.Fueyo, "Large Eddy Simulation of the Flow a square cylinder," *Journal of Fluids Engineering*, vol. 122, no. 1, pp. 39-47, 2000.
13. T. Liu, G. Liu, Y. Ge, H. Wu and W. Wu, "Extended lattice Boltzmann equation for simulation of flows around bluff bodies in high Reynolds number," in *Bluff bodies Aerodynamics and Applications*, Milano, 2008.



FREE SURFACE FLOW THROUGH POROUS MEDIA BY LATTICE BOLTZMANN METHOD

Abstract

A lattice Boltzmann method has been considered capable numerical technique for various fluid dynamics problems. In this paper, we have examined a free surface porous media flow problem by a single phase lattice Boltzmann method with a single relaxation time. Firstly, a developed two dimensional numerical code had validated on flow past a square obstacle in terms of performance. By coupling the free surface tracking algorithm and the porous media flow simulation technique in lattice Boltzmann method, one can simply solve the unsaturated porous media flow with the free surface which is one of challenging subject in engineering study. In our knowledge, this is first try to couple free surface flow with porous media flow among other studies with lattice Boltzmann method. Two case of the free surface water flow through the vertical porous structure had been investigated and demonstrated problem solving availability.

Key words: Fluid flow, Unsaturated porous media flow, Free surface flow, Numerical method