


Рамсейн өсөлтийн загвар

Чулуунбаатарын Анхбаяр^{1,2*} 

¹ *Шинжлэх Ухааны Академи, Математик, тоон технологийн хүрээлэн, Улаанбаатар 13330, Монгол улс*

² *Монгол улсын их сургууль, Бизнесийн сургууль, Улаанбаатар 14192, Монгол улс*

*Холбоо барих зохиогч: ankhbayar.ch@num.edu.mn; ORCID:0000-0002-3559-4246

Өгүүллийн мэдээлэл: Хүлээн авсан: 2023.09.09; Зөвшөөрөгдсөн: 2023.10.01;
Нийтлэгдсэн: 2023.12.31

Хураангуй: Энэхүү судалгааны ажлаар хаалттай эдийн засаг дахь Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) нарын загварыг ашиглахыг зорилоо. Бид RCK нарын үндсэн загварыг ашигласан ба нэмэлтээр матрицын хувийн утгуудыг ашиглан тогтвортой төлөвийн динамик загвар нь асимптот тогтвортой эсэхийг шалгах нөхцөлийг тусгасан. Тодорхойлсон динамик загварууд нь асимптот тогтвортой эсэхийг 1995-2021 оны статистикийн тоон мэдээлэл, үйлдвэрийн функц болон хүн амын өсөлтийн үнэлгээг ашиглан шалгасан. Шинжилгээний үр дүнд Монголын эдийн засгийн хувьд нийгмийн сайн сайхан байдалд хүргэх максимум хэрэглээг хангахын тулд капиталын хэмжээг 3 дахин, үйлдвэрлэлийн хэмжээг 1.6 дахин нэмэгдүүлэх шаардлагатай байна.

Түлхүүр үгс: Ханамжийг максимумчлах, Гамильтоны функц, тогтвортой төлөв, үйлдвэрлэлийн функцийг үнэлгээ, Жаковын матриц

1. Оршил

Нийгмийн оновчтой хуримтлалын цогц загварыг анх 1928 онд Frank P. Ramsey танилцуулсан [1]. Тухайн цаг үедээ түүний загвар хүчтэй хариу үйлдэл үзүүлээгүй ч эдийн засгийн өсөлтийн онолд математикийг татан оруулсан нь түүний гол гавъяа гэж хэлж болно. Ramsey хувь нэмэр эдийн засгийн өсөлтийн онолд гучин жилийн дараа буюу 1956 онд Robert M. Solow-н загварт бодит биеллээ олж эхэлсэн [2]. Solow-н загвар нь Ramsey загварын тухайн тохиолдол юм. Тус хоёр загварыг нэгтгэснээр 1960-аад оноос шинэ сонгодог өсөлтийн онолын үндэс бий болжээ.

Ramsey өсөлтийн загварт өрх болон пүүсүүд төгс өрсөлдөөнд зах зээл дээр харилцан үйлчлэлцэж, тус бүрдээ оновчтой шийдвэр гаргаснаар хэрэглээ болон капиталын оновчтой түвшиндээ тодорхойлно. Өрхүүд төсвийн хязгаарлалтын хүрээнд хэрэглээгээ оновчтой болгосноор ханамжаа өндөр байлгана. Түүнчлэн пүүсүүд оновчтой капиталыг бий болгосноор өөрсдийн олох ашгиа өндөр түвшинд хадгална. Эдгээрийн үр дүнд нэг хүнд ногдох орлогын хэмжээ оновчтой тогтоогдож, цаашлаад хуримтлалаар дамжин эдийн засгийн өсөлтийг түргэсгэх боломжтой болно. Ramsey загвар дахь зарим хатуу нөхцөлүүдийг Cass [3] ба Koopmans [4] нар зөөлрүүлж, цааш өргөтгөсөн. Өрхүүд ирээдүйн хэрэглээнээс илүүтэйгээр өнөөгийн хэрэглээнээс авах ханамжийг илүүд үздэг тул нийгмийн ханамжид цаг хугацааг харгалзан үзэхгүй гэж тэд тайлбарласан. Мөн тэд хүн амын өсөлтийг экспоненциал өсөлттэй байхаар авч үзсэн.

Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) загварын хүн амын экспоненциал өсөлтийн оронд логистик өсөлтийг оруулан M. Smith [5] нарийвчлан судалсан. Тэрээр хүн амын өсөлтийг

логистик хэлбэрээр авч үзэн урт хугацааны тэнцвэрийн хэрэглээ болон капиталын түвшинд RCK загвартай харьцуулахад үл ялиг өөрчлөлт гарч байгааг харуулсан. Логистик хүн амын өсөлттэй Ramsey загварын тогтворжилтын болон шилжилтийн динамикийг Brista ба Accineli [6] нар судалсан. Тэд гурван дифференциал тэгшитгэлийг тодорхойлсон ба тэнцвэрийн цэгийн системийн тогтворжилт нь хоёр сөрөг хувийн утгатай эмээлийн цэг байгааг тогтоосон. Эмээлийн шилжилтийн зам нь хоёр хэмжээстээр тодорхойлогдоно. Харин Ramsey загварын оновчтой удирдлагын оновчлолын нөхцөлийг Bindaу ба Neamtu нар тодорхойлсон [7]. Тэд оновчтой удирдлагын оновчлолын траектор нь дифференциал тэгшитгэлийн системийн шийд гэдгийг харуулсан ба тодорхойлсон дифференциал тэгшитгэлийн тогтвортой төлөвийн оновчлолын зайлшгүй нөхцөлийг баталсан.

Энэхүү судалгааны ажил нь дараах хэсгээс бүрдэнэ. Хоёрдугаар хэсэгт RCK загварын үндсэн тавилыг авч үзнэ. Гуравдугаар хэсэгт дифференциал тэгшитгэлийн системийн тогтворжилтын нөхцөлийг тодорхойлно. Дөрөвдүгээр хэсэгт холбогдох тоон мэдээллийг ашиглан загварын параметрийг үнэлнэ. Тавдугаар хэсэгт тухайн загварын тогтвортой төлөвийг шинжилнэ. Сүүлийн хэсэгт дүгнэлт хийнэ.

2. Арга зүй

2.1. Ramsey-Cass-Koopmans

Эдийн засаг үйлдвэрлэн гаргасан хэмжээнийхээ нэг хэсгийг шинээр хийх (I) хөрөнгө оруулалтад эсвэл (δ) элэгдэж хорогдсон капиталаа нөхөн сэргээхэд зарцуулдаг байг.

$$\dot{K} = I - \delta K \quad (2.1)$$

Тухайн эдийн засагт засгийн газрын зардал байхгүй, хаалттай эдийн засгийг авч үзье. Тэгвэл үйлдвэрлэл, хэрэглээ, хөрөнгө оруулалтын хамаарал нь

$$Y = C + I, \quad (2.2)$$

байна. Үйлдвэрлэлийн хэмжээ, түүний өөрчлөлтөд нөлөөлөх хүчин зүйлсийг үйлдвэрлэлийн функцээр төлөөлүүлдэг.

$$Y = F(K, L), \quad (2.3)$$

Энд Y : үйлдвэрлэл, K : капитал, L : ажиллагсдыг илэрхийлнэ. Үйлдвэрлэлийн функцийн орцуудын нэгдүгээр эрэмбийн өөрчлөлт тэгээс эрс их, хоёрдугаар эрэмбийн өөрчлөлт нь тэгээс эрс бага, орцуудыг ижил дүнгээр өсгөвөл нийт гарц ижил дүнгээр өснө гэсэн чанаруудыг хангадаг [8]. Эдгээр чанаруудад үндэслэн (2.3)-г дараах байдлаар хувиргаж болно.

$$Y = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k),$$

Энд $y = Y/L$: нэг ажиллагсдад ногдох үйлдвэрлэлийн хэмжээ, $k = K/L$: нэг ажиллагсдад ногдох капиталын хэмжээг илэрхийлнэ. Тэгшитгэл (2.1) ба (2.2)-с

$$\dot{K} = Y - C - \delta K,$$

байх ба ажиллагсдын тоонд хуваавал

$$\frac{\dot{K}}{L} = f(k) - c - \delta k, \quad (2.4)$$

болно. Энд $c = C/L$: нэг ажиллагсдад ногдох хэрэглээг илэрхийлнэ. Цааш нь k -н дифференциалыг

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L} \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - nk, \quad (2.5)$$

гэж илэрхийлж болно. Энд $n = \dot{L}/L$: хүн амын өсөлтийг илэрхийлнэ. RCK загварт хүн амын өсөлтийн түвшин нь ажиллах хүчний өсөлтийн түвшинтэй ижил гэж авч үздэг. Одоо (2.5)-д (2.4)-г орлуулбал

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k, \quad (2.6)$$

болно. Өрх өөрсдийн ханамжаа дээшлүүлэхийн тулд рациональ үйл хөдлөл хийх ба өөрчлөгдөж буй нөхцөлд хурдан зохицдог. Өрх ирээдүйн хэрэглээнээс илүүтэйгээр өнөөгийн хэрэглээг илүүд үздэг. Өрх нийт ханамжаа максимум байлгахыг зорино. Өрхийн ханамжийн функц нь [1]

$$U = \int_0^{\infty} u(c)e^{nt}e^{-\rho t} dt, \quad (2.7)$$

байх ба энд $u(c)$: хэрэглээнээс авах ханамжийг, ρ : дискаунтын коэффициентийг илэрхийлнэ. Энэхүү ханамжийн функцийг ирээдүйн ханамжуудын жинлэгдсэн нийлбэр гэж үзнэ. Иймд тэгшитгэл (2.6)-н хязгаарлалтын хүрээнд ханамжийг максимумчлах бодлогыг дараах байдлаар тодорхойлж болно.

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} u(c)e^{nt}e^{-\rho t} dt, \\ \dot{k} &= f(k) - c - (n + \delta)k, \\ k(0) &= k_0, c(0) = c_0, \\ 0 &\leq c \leq f(k), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)v(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Гамильтоны функцийг бичвэл

$$H = u(c)e^{-(\rho-n)t} + v(f(k) - c - (n + \delta)k)$$

байх ба нэгдүгээр эрэмбийн нөхцөлүүдээс

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = 0 \rightarrow v = u'(c)e^{-(\rho-n)t} \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial k} + (\rho - n)v \rightarrow \dot{v} = -v(f'(k) - n - \delta) + (\rho - n)v \\ \dot{k} = \frac{\partial H}{\partial v} \rightarrow \dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k \end{cases} \quad (2.9)$$

болно. Энд v -г Гамильтоны функцийн үржүүлэгчийн нөлөө гэж нэрлэнэ. Тус системийн тэгшитгэл нэгээс

$$\begin{aligned} v &= u'(c)e^{-(\rho-n)t}, \\ \dot{v} &= u''(c)\dot{c}e^{-(\rho-n)t} \end{aligned}$$

гарна. Хооронд нь харьцуулбал

$$-\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{u''(c)\dot{c}e^{-(\rho-n)t}}{u'(c)e^{-(\rho-n)t}} = -\frac{u''(c)\dot{c}}{u'(c)c}$$

болох ба энд $\theta = -cu''(c)/u'(c)$ -г Arrow-Pratt [9] нарын эрсдэлд дургүй байдлын хэмжигдэхүүн гэж нэрлэдэг. Иймд систем тэгшитгэлийн хоёроос

$$f'(k) - \delta - \rho = \theta \frac{\dot{c}}{c}$$

болно. Одоо (2.9) систем тэгшитгэл дараах байдлаар бичигдэнэ.

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho) \\ \dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k \end{cases} \quad (2.10)$$

Энд r -г капитал өгөөж гэх ба хэрэв $f'(k) = r + \delta$ гэсэн нөхцөлүүд хангагдаж байвал үүнийг Ramsey үндсэн загвар гэнэ. Тус нөхцөлүүд хангагдаж байвал

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

байх ба энэхүү үр дүнгээс Ramsey-н дараах дүрэмд хүргэдэг.

- $r = \rho$ байхад нэг хүнд ногдох хэрэглээ тогтмол байна.
- $r > \rho$ байхад хугацааны туршид хэрэглээ өсөх ба хуримтлал үүснэ.
- $r < \rho$ байхад хугацааны туршид хэрэглээ буурах ба хуримтлал үүсэхгүй.

2.2. Тогтворжилтын нөхцөл

Бид үйлдвэрлэлийн функцийг дараах Кобб-Дугласын хэлбэрээр авч үзье.

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

Энд A нь нийт хүчин зүйлийн бүтээмжийг илэрхийлнэ. Тус функцийг нэг ажиллагсдад ногдох хэлбэрээр дараах байдлаар бичиж болно.

$$y = f(k) = Ak^\alpha \quad (2.11)$$

Тогтвортой төлөвийн утгыг $\dot{c} = 0$, $\dot{k} = 0$ байх нөхцөлийн хүрээнд олно. Иймд систем (2.10)-н тэгшитгэл нэгээс тогтвортой төлөвийн утгууд

$$\begin{aligned} \dot{c} = 0 &\Rightarrow A\alpha\bar{k}^{\alpha-1} = \delta + \rho \Rightarrow \bar{k} = \left(\frac{A\alpha}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \dot{k} = 0 &\Rightarrow \bar{c} = A\bar{k}^\alpha - (n + \delta)\bar{k}, \end{aligned}$$

гэж олдоно. Тогтворжилтыг шинжлэхийн тулд тэнцвэрийн цэгийн орчмын шугаман дөхөлтийг авч үзье. Шугаман дөхөлтийн Жаковын матриц нь дараах байдлаар бичигдэнэ.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \\ \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \end{bmatrix}$$

Энд тогтвортой төлөвийн нөхцөлийг оруулбал

$$\frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta} = 0 \Rightarrow f'(k) - \delta = \rho$$

байх ба Жаковын матриц нь

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{c}f''(\bar{k})}{\theta} \\ -1 & \rho - n \end{bmatrix}$$

болно. Тус матриц дээр үндэслэсэн хувийн утгууд (eigenvalues) нь

$$\det \begin{vmatrix} 0 & \frac{\bar{c}f''(\bar{k})}{\theta} \\ -1 & \rho - n \end{vmatrix} = 0$$

тул

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\rho - n \pm \sqrt{(\rho - n)^2 - 4\bar{c} \frac{f''(\bar{k})}{\theta}} \right)$$

гэж олдоно. Тогтвортой төлөвийн орчмын шилжилтийн динамик нь шугаман дөхөлтийн чанараар

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\bar{c}f''(\bar{k})}{\theta} \\ -1 & \rho - n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - \bar{c} \\ k - \bar{k} \end{pmatrix}$$

гэж бичигдэнэ.

3. Үр дүн

3.1. Үйлдвэрлэлийн функцийн үнэлгээ

РСК загварыг турших үүднээс үйлдвэрлэл, капиталын хэмжээ, ажиллагсад болон хүн амын тоог Үндэсний статистикийн газраас авч ашиглав. Капиталын хэмжээг тооцохдоо $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$, $\delta = 0.05$ гэсэн томъёог ашигласан ба Cheng [10]-н арга зүйг хэрэглэв. Холбогдох тоон өгөгдлүүд нь 1995-2021 оныг хамрах ба үйлдвэрлэлийн хэмжээг 2010 оны зэрэгцүүлэх үнээр тооцсон бодит дотоодын нийт бүтээгдэхүүнээр, капиталын хэмжээг дефлятор ашиглан тооцсон 2010 оны зэрэгцүүлэх үнээр тус тус төлөөлүүлэн авсан (Хүснэгт 1-д харуулав). Харин үйлдвэрлэлийн функцийн үнэлгээг хүснэгт 2-т харуулсан.

Хүснэгт 1: Тоон өгөгдөл

Онууд	Бодит ДНБ, 2010 оны зэрэгцүүлэх үнээр, тэрбум төг	Капитал, 2010 оны зэрэгцүүлэх үнээр, тэрбум төг	Ажиллагсад, мян. хүн	Хүн амын тоо, мян. хүн
1995	4,554	2,315	767.6	2243.0
1996	4,654	3,075	769.6	2276.0
1997	4,836	3,996	756.0	2307.5
1998	4,996	4,943	792.6	2340.1
1999	5,150	6,163	813.6	2373.5
2000	5,207	7,415	809.0	2403.1
2001	5,361	8,359	832.3	2432.4
2002	5,614	9,086	870.8	2465.7
2003	6,008	9,911	926.5	2495.1
2004	6,646	11,026	950.5	2521.7
2005	7,129	12,131	968.3	2551.1
2006	7,739	13,204	1009.9	2583.3
2007	8,533	14,237	1024.1	2620.4
2008	9,293	15,682	1041.7	2666.0
2009	9,171	17,428	1006.3	2716.3
2010	9,757	19,544	1033.7	2761.0
2011	11,468	22,412	1037.7	2811.3
2012	12,899	30,087	1056.4	2867.7
2013	14,391	36,711	1103.6	2930.3
2014	15,554	41,127	1110.7	2995.9
2015	15,949	45,082	1151.2	3057.8
2016	16,169	47,784	1147.8	3119.9
2017	17,047	51,436	1238.3	3177.9
2018	18,248	55,427	1253.0	3238.5
2019	19,251	60,196	1146.2	3296.9
2020	18,404	65,480	1162.9	3357.5
2021	18,703	70,544	1125.6	3409.9

Эх сурвалж: Үндэсний статистикийн газар

Хүснэгт 2-н загвар 1-с харахад параметрууд нь статистикийн хувьд ач холбогдолтой. Тайлбарлах чадвар 0.92 хувьтай гарчээ. Гэвч $DW = 0.237 < d_L(27;1;0.05) = 1.32$ буй нь автокорреляцийг харуулж байна. Түүнчлэн Serial Correlation LM Test-с харахад үлдэгдэл санамсаргүй хэмжигдэхүүнд нь хоорондоо хамааралтай, нэгэн төрлийн бус шинжтэй байна. Иймд бид автокорреляцийг AR(1) процесс ашиглан үнэлэхэд загвар 2-н үнэлгээ эрс сайжирчээ.

Хүснэгт 2-н загвар 2-с харахад тайлбарлах чадвар 0.92-0.99 болж өссөн байна. Мөн DW-ны утга нэмэгджээ. Тус $DW = 1.745 > d_L(26; 2; 0.05) = 1.22$ байгаа нь авторреляци арилсныг илэрхийлнэ. Түүнчлэн үлдэгдэл санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд нь хоорондоо хамааралгүй байгааг Serial Correlation LM Test-ээс, нэгэн төрлийн шинжтэй байгааг Heteroskedasticity Test-с тус тус харж болно.

Хүснэгт 2: Үйлдвэрлэлийн функцийн үнэлгээ

Хамааран хувьсагч: $\ln(y)$	Загвар 1	Загвар 2
C	1.043***(0.073)	0.955***(0.031)
$\ln(k)$	0.421***(0.024)	0.448***(0.010)
AR	-	0.743***(0.075)
R-squared	0.920	0.989
Durbin-Watson stat	0.237	1.745
Observation	27	26
Serial Correlation LM test	0.001	0.733
Heteroskedasticity test	0.004	0.686

Хаалтан дотор стандарт хазайлтыг илэрхийлнэ. *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$

Иймд бид эконометрикийн найдвартай үнэлгээ болох загвар 2-с үйлдвэрлэлийн функцийг

$$\ln(y) = 0.955 + 0.448\ln(k) \Rightarrow y = 2.599k^{0.448}$$

гэж бичье. Харин хүн амын өсөлтийг бид экспоненциал загвараар үнэлсэн ба үнэлгээний үр дүнг хүснэгт 3-т харуулав. Үнэлгээнээс $n = 0.016$ байна.

Хүснэгт 3: Хүн амын өсөлтийн үнэлгээ

Хамааран хувьсагч: $\ln(L)$	Загвар 1
c	7.697***(0.005)
t	0.016***(0.000)
R-squared	0.989
Durbin-Watson stat	0.061
Observation	27
Serial Correlation LM test	0.000
Heteroskedasticity test	0.890

*** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$

3.2. Тогтвортой төлөвийн шинжилгээ

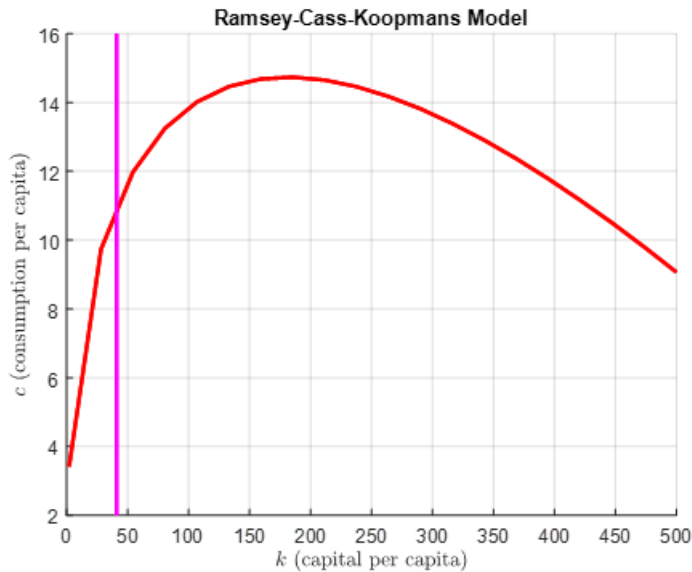
Хөгжиж байгаа орнуудын ерөнхий жишгээр эрсдэлд дургүй байдлын харьцангуй коэффициент $\theta = 0.5$, элэгдлийн коэффициент $\delta = 0.05$, дискаунтын коэффициент $\rho = 0.1$ байдаг. Иймд бид эдгээр болон үйлдвэрлэлийн функцийн параметруудийг ашиглавал: Тогтвортой төлөвийн нэг ажиллагсадад ногдох капиталын хэмжээ:

$$\bar{k} = \left(\frac{A\alpha}{\delta + \alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{2.599 \times 0.448}{0.05 + 0.10} \right)^{\frac{1}{1-0.448}} = 40.955$$

Нэг ажиллагсад нэгдэх хэрэглээний түвшин:

$$\bar{c} = A\bar{k}^\alpha - (n + \delta)\bar{k} = 2.599 \times 40.955^{0.448} - (0.016 + 0.05) \times 40.955 = 11.009$$

гэж олдож байна. Тус шийдийн үр дүнг зураг 1-т харуулав. Харин тогтвортой төлөвийн капиталын хэмжээ $40.955 \times 1125.6 = 46.099$ тэрбум төгрөг, тогтвортой төлөвийн үйлдвэрлэлийн хэмжээ $2.599 \times 40.955^{0.448} \times 1125.6 = 15.431$ тэрбум төгрөг байна. Хүснэгт 1-с харахад энэхүү тогтвортой төлөвтөө 2014-2016 онуудад хүрч байжээ. Зураг 1-с харахад нэг ажиллагсад нэгдэх хэрэглээний максимум хэмжээ 14.736 байна. Тус түвшинд хүргэх нэг ажиллагсад нэгдэх капиталын хэмжээ 185.474 гэж олдож байна. Эндээс хэрэглээг максимум хэмжээнд хүргэх капиталын хэмжээ $185.474 \times 1125.6 = 208,769$ тэрбум төгрөг буюу өнөөдрийн утгаас $208,769/70,544 = 3$ дахин өндөр байна. Харин үйлдвэрлэлийн хэмжээ $2.599 \times 185.474^{0.448} \times 1125.6 = 30,362$ тэрбум буюу өнөөдрийн утгаас $30,362/18,703 = 1.6$ дахин өндөр байна.



Зураг 1: Тогтвортой төлөв

Тогтвортой төлөвийн Жаковын матриц нь

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0.045 \\ -1 & 0.084 \end{bmatrix}$$

байх ба матрицийн хувийн утгууд

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(0.084 \pm \sqrt{0.084^2 + 4 \times 0.045} \right) = (-0.173, 0.257)$$

гэж олдож байна. Харин тогтвортой төлөвийн орчмын шилжилтийн динамик нь

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.045 \\ -1 & 0.084 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - 11.009 \\ k - 40.955 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.823 \\ 7.568 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.045 \\ -1 & 0.084 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}$$

байна. Тус систем тэгшитгэлийг MATLAB ашиглан бодоход: Нэг ажиллагсад нэгдэх хэрэглээний динамик нь

$$c(t) = 10.971 + 1.743e^{0.257t} - 2.714e^{-0.173t}, \quad c(0) = 10$$

Нэг ажиллагсад нэгдэх капиталын динамик нь

$$k(t) = 40.511 - 10.002e^{0.257t} - 10.509e^{-0.173t}, \quad k(0) = 20$$

гэж олдож байна. Динамикуудаас харахад нэг ажиллагсад ногдох хэрэглээний динамик нь хугацаа өнгөрөх тутам өсөхөөр байгаа бол нэг ажиллагсад ногдох капиталын динамик нь хугацаа өнгөрөх тутам буурахаар байна.

4. Хэлэлцүүлэг

Ramsey-Cass-Коопmans (РСК) нарын загвар нь хаалттай эдийн засгийн нөхцөл байдлын хүрээнд тодорхойлогддог тул шинжилгээнээс гарсан үр дүн нь бодит байдалд нийцэхгүй байх талтай. Мөн шинжилгээний үр дүнгүүд загварын өргөтгөл, тоон өгөгдлөөс хамаарсан параметрийн өөрчлөлтөөс шалтгаалан ялгаатай гарч болно. Бодит байдалд нийцэхүйц үр дүнд хүрэхийн тулд нээлттэй эдийн засгийн нөхцөл байдлыг загварт нэмж оруулах шаардлагатай. Энэ тохиолдолд тогтвортой төлөвийн динамик нь нэг ажиллагсад ногдох хэрэглээ болон капиталаар хязгаарлагдахгүй, нэмж нэг ажиллагсад ногдох засгийн газрын зардлын хэмжээ нэмэгдэх боломжтой. Иймд тогтворжилтын нөхцөлийн хүрээнд асимптот тогтвортой эсэхийг ерөнхий тохиолдолд харуулсан теоремыг дараа дараагийн судлаач нар өөрсдийн судалгаандаа нэмж оруулах хэрэгтэй.

5. Дүгнэлт


Энэхүү судалгааны ажлаар Монгол улсын эдийн засгийг Ramsey-Cass-Коопmans (РСК) нарын загвараар тайлбарлах оролдлогыг авч үзлээ. Ингэхдээ бид РСК нарын загварыг огт хувиргаагүй ба үндсэн хэлбэрийг ашигласан. Үндсэн загварт нэмэлтээр бид Жаковын матриц дээр суурилсан матрицын хувийн утгуудыг ашиглан тогтвортой төлөвийн динамик загвар нь асимптот тогтвортой эсэхийг шалгах нөхцөлийг оруулсан. Динамик загварууд нь асимптот тогтвортой эсэхийг 1995-2021 оны статистикийн тоон мэдээлэл, үйлдвэрийн функц болон хүн амын өсөлтийн үнэлгээг ашиглан шалгасан. Шинжилгээний үр дүнд тогтвортой капитал болон үйлдвэрлэлийн хэмжээндээ 2014-2016 онуудад буюу эдийн засгийн өсөлт саарсан жилүүдэд хүрч байжээ. Монголын эдийн засгийн хувьд нийгмийн сайн сайхан байдалд хүргэх максимум хэрэглээг хангахын тулд капиталын хэмжээг 3 дахин, үйлдвэрлэлийн хэмжээг 1.6 дахин нэмэгдүүлэх шаардлагатай байна. Нийгмийн сайн сайхны түвшний хэрэглээг хангахын тулд бодит дотоодын нийт бүтээгдэхүүнийг одоогийн түвшнээс 11.7 их наяд төгрөгөөр нэмэгдүүлэх тооцоо гарч байна.

Ном зүй

- [1] F. P. Ramsey, "A Mathematical Theory of Saving," *The Economic Journal*, Vol. 38, no. 152, Dec., pp. 543-559, 2002, doi: <https://doi.org/10.2307/2224098>.
- [2] R. M. Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, no. 1, Feb., pp. 65-64, 1956, doi: <https://doi.org/10.2307/1884513>.
- [3] D. Cass, "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *The Review of Economic Studies*, Vol. 32, no. 3, July., pp. 233-240, 1965, doi: <https://doi.org/10.2307/2295827>.
- [4] T. C. Koopmans, "On the concept of optimal economic growth," *The Econometric Approach to Development Planning*. North-Holland, Amsterdam, 1965.
- [5] T. Smith, *Models in Ecology*, Cambridge University Press: Cambridge, 1974.
- [6] J. G. Brida and E. Accinelli, "The Ramsey model with logistic population growth," *Economics Bulletin*, Vol.3, no. 15, pp. 1-8, 2007.
- [7] O. Bundau and M. Neamtu, "Optimal conditions for the control problem associated to a Ramsey model with endogenous population," *Recent Advances in Mathematics and Computers in Business, Economics, Biology and Chemistry*, pp. 175-180, 2010.
- [8] C. Budnyam and Ts. Batsukh, *Theory and application of production function*, Ulaanbaatar, 1997.

- [9] J. W. Pratt, "Risk aversion in the small and in the large," *Econometric*, Vol. 32, pp. 122-136, 1964, doi: <https://doi.org/10.2307/1913738>.
- [10] K. C. Cheng, "Growth and recovery in Mongolia during transition," *IMF Working Paper*, pp. 1-26, 2003, doi: <https://doi.org/10.5089/9781451875133.001>.

Ramsey's growth model

Ankhubayar Chuluunbaatar^{1,2*} 

¹*Institute of Mathematics and Digital Technology, Mongolian Academy of Sciences, Ulaanbaatar 13330, Mongolia*

²*Business School, National University of Mongolia, Ulaanbaatar 14192, Mongolia*

**Corresponding author: ankhubayar.ch@num.edu.mn; ORCID:0000-0002-3559-4246*

Article Info: Received: 2023.09.09; Accepted: 2023.10.01; Published: 2023.12.26

Abstract: The objective of this study is to utilize the Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) model within a closed economy framework. We utilize a fundamental RCK model and incorporate the steady state condition of the dynamic model by employing matrix eigenvalues. The dynamic model analyzes the utilization of data from the period of 1995-2021, taking into account the production function and population growth. To maximize well-being, it is necessary for capital to be 3 times its current level, while the production amount should be increased by 1.6 times.

Key words: Hamiltonian function, utility function, steady-state values, production function, Jacobian matrix
