

Халдвар Тархалтын SEIR Загварыг Тооцоолох Стандарт Бус Ялгаварт Схем

Шагдарын Энх-Амар*, Балтын Батгэрэл

Шинжлэх Ухааны Академи, Математик, тоон технологийн хүрээлэн, Улаанбаатар 13330, Монгол улс

*Холбоо барих зохиогч: enkhamar_sh@mas.ac.mn; ORCID:0000-0001-5305-2021

Өгүүллийн мэдээлэл: Хүлээн авсан: 2022.09.07; Зөвшөөрөгдсөн: 2022.10.01;
Нийтлэгдсэн: 2022.12.26

Хураангуй: Дифференциал тэгшитгэлийг тооцоолох стандарт бус ялгаварт схемийг байгуулахдаа уламжлалыг илэрхийлэх ялгаварт харьцааны хуваарийг тоон торны алхамаас хамаарсан функц хэлбэрээр сонгон авдаг. Одоо ашиглагдаж буй халдвар тархалтын загваруудыг тооцоолох стандарт бус ялгаварт схемүүд нь ижил хуваарьтай байна. Энэхүү өгүүлэлд авч үзэж буй стандарт бус ялгаварт схем нь дифференциал тэгшитгэлүүдийн системийн уламжлалуудыг тэгшитгэл бүрээс нь хамааруулж өөр өөр хуваарьтай ялгаварт харьцаагаар сольж байгуулж байгаагаараа онцлог юм. Шинэ схемийн хувьд системийн хадгалагдах хууль биелэж байгааг батлав. Тоон туршилтыг стандарт схем болон стандарт бус ижил хуваарьтай ялгаварт схемтэй харьцуулахад шинэ схем илүү сайн ажиллаж байгааг харуулав.

Түлхүүр үгс: Матрицын экспоненциал, Хадгалагдах хууль

1. Оршил

Ихэнх физик системийн математик загвар нь шугаман бус дифференциал тэгшитгэл, түүний системээр илэрхийлэгдэх бөгөөд аналитик аргаар шийдэгдэх боломжгүй байдаг. Иймд шийдийг тодорхойлох боломжит цор ганц арга нь тоон аргууд байдаг. Дифференциал тэгшитгэлийн шийдийг тооцоолох стандарт аргууд нь (Эйлерийн, Рунге-Кутын гэх мэт) тоон торны алхам хангалттай бага үед шийд уруу нийлэх бөгөөд харьцангуй том алхамтай үед нийлэлт явагддаггүй. Энэхүү тоон тогтворгүй байдал үүсэх шалтгаан нь торны алхам хэмээх үндсэн системд байхгүй тоон параметр h дискрет системд бий болсноос шалтгаалдаг. Иймээс h параметрээс шалтгаалсан бифуркацийн үзэгдэл дискрет системд бий болдог. Энэхүү бифуркацийн үзэгдэлээс ангид ялгаварт схем байгуулахад стандарт бус схемийн зорилго оршино. Стандарт бус схем байгуулах судалгааны чиглэлийг АНУ-ын эрдэмтэн Рональд Э.Микенс анх хөгжүүлсэн байна.

Микенс стандарт бус схем байгуулахад баримтлах хэд хэдэн дүрмийг тодорхойлсон байдаг [1-6]. Эдгээрээс 2 дүрмийг нь зайлшгүй хэрэглэж байх шаардлагатай байдаг. Үүнд:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [a, b] \quad (1.1)$$

дифференциал тэгшитгэлийг

$$t_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (1.2)$$

жигд тоон торон дээр тооцоолох төгсгөлөг ялгаварт схем байгуулахад

1. Уламжлалыг хуваарь нь торны алхам h -аас хамаарсан

$$\phi(h) = h + O(h^2) \quad (1.3)$$

нөхцөлийг хангах функц байх

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\phi(h)} \quad (1.4)$$

ялгаварт харьцаагаар солих шаардлагатай. Өргөн ашиглагддаг $\phi(h)$ функцийн хэлбэр нь

$$\phi(h) = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} \quad (1.5)$$

бөгөөд λ нь тухайн тэгшитгэлд оролцож буй ямар нэгэн параметр байдаг.

2. Шугаман бус гишүүдийг локаль бус хэлбэрээр илэрхийлэх шаардлагатай, өөрөөр хэлбэл, эдгээр гишүүдийг тоон торны ялгаатай цэгүүд ашиглан илэрхийлэх нь зүйтэй юм. Тухайлбал,

$$x^2 \approx x_k x_{k+1}. \quad (1.6)$$

Халдвар тархалтын олон янзын стандарт бус схемүүдийг судлаачид байгуулсан байдаг. Эдгээр схемүүдийг байгуулахад өргөн хэрэглэгдэж буй арга нь системийн тэгшитгэл бүрийн уламжлалыг ялгаварт харьцаагаар солихдоо нэгэн ижил $\phi(h)$ функцийг ашиглаж байна. Гэтэл уг функцийн параметр нь тэгшитгэл бүрд байх албагүй тул системийн зарим тэгшитгэлийг түүнд байхгүй параметр ашиглан илэрхийлж байгаа нь учир дутагдалтай юм [7-14]. Шинээр байгуулсан стандарт бус схем нь энэ дутагдалаас ангид, өөрөөр хэлбэл дифференциал тэгшитгэл бүрт харгалзах ялгаварт харьцааны хуваарь нь өөр, өөр функц байдлаар тодорхойлсон явдал юм.

Өгүүлэл нь 4 хэсэгтэй. Арга зүй хэсгийн 2.1-д стандарт бус схемийн өргөтгөл, 2.2-т халдвар тархалтын SEIR загвар, 2.3-т SEIR загварын өргөтгөөн стандарт бус схем, 2.4-т хүн амын тоо хадгалагдах теорем, Үр дүнгийн 3-р хэсэгт тоон туршилтын харьцуулсан үр дүн, эцэст нь 4-р хэсэгт дүгнэлт зэргийг тус тус авч үзэх болно.

2. Арга зүй

2.1. Стандарт бус схемийг өргөтгөх нь

Дифференциал тэгшитгэлүүдийн системийг тооцоолох стандарт бус ялгаварт схем байгуулах шинэ арга зүйг [15] ажилд авч үзсэн байна. Дараах хэлбэрийн дифференциал тэгшитгэлүүдийн системийг авч үзье.

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(X), \quad (2.1)$$

Энд: $t \in [0, T]$, $X \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ болно.

(2.1) системийн аналитик шийдийг $[t, t+h]$ завсарт бичвэл:

$$X(t+h) = e^{hA} X(t) + \int_t^{t+h} e^{(t+h-s)A} B(X(s)) ds \quad (2.2)$$

хэлбэртэй байна. Стандарт бус ялгаварт схем байгуулах Микенсийн 3-р дүрмийн дагуу $B(X(s))$ шугаман бус функцийг энэ завсарт локаль бус хэлбэрээр

$$B(X(s)) \simeq \mathcal{B}(X(t), X(t+h)) \quad (2.3)$$

аппроксимацчилбал ойролцоо шийд

$$X_{k+1} = e^{hA} X_k + (e^{hA} - I)A^{-1}\mathcal{B}(X_k, X_{k+1}) \quad (2.4)$$

хэлбэртэй болно. Энд: X_k нь $X(t_k)$ -ийн дөхөлт, $t_k = kh, k \in \mathbb{N}_0, I \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ нэгж матриц болно. (2.4) тэгшитгэлд

$$\Phi(h) = (e^{hA} - I)A^{-1} \quad (2.5)$$

орлуулга хийж хувиргавал

$$\Phi^{-1}(h)(X_{k+1} - X_k) = AX_k + \mathcal{B}(X_k, X_{k+1}) \quad (2.6)$$

өргөтгөсөн стандарт бус төгсгөлөг ялгаварт схем гарна. $\Phi(h)$ функц нь

$$\Phi(h) = hI + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.7)$$

нөхцөлийг хангана.

2.2. Халдвар тархалтын SEIR загвар

Нийт хүн амыг эрүүл ($S(t)$), халдвар далд хэлбэртэй байгаа ($E(t)$), халдвар илэрсэн ($I(t)$), эдгэрсэн ($R(t)$) гэсэн бүлгүүдэд хувааж авч үзэхийг халдварт тархалтын SEIR загвар гэж нэрлэнэ. Бүлэг хоорондын урсгалын динамик нь дараах дифференциал тэгшитгэлүүдийн системээр илэрхийлэгдэнэ [16].

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta IS - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta IS - (\mu + \gamma)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Системийн параметрууд эерэг утгатай байх бөгөөд дараах үзүүлэлтүүдийг тус тус илэрхийлнэ.

Үүнд: Λ -төрөлтийн түвшин; β -халдвар тархах түвшин; γ -далд үеийн түвшин; α -эдгэрэх түвшин; μ -нас баралтын түвшин.

Нийт хүн амын тоо $N = S + E + I + R$ хугацаанаас хамааран өөрчлөгдөх бөгөөд

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N \quad (2.9)$$

тэгшитгэлийг хангана. Иймд шийд нь

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \quad (2.10)$$

болох бөгөөд

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (2.11)$$

асимптот нөхцлийг хангана.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \cdot \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \cdot \frac{\beta}{\mu + \alpha} \quad (2.12)$$

Энэхүү (2.12)-ыг дахин халдварлалтын тоо (the reproduction number) гэх ба \mathcal{R}_0 гэж тэмдэглэдэг. Дээрх (2.8) системийн тэнцвэржилтийн цэгийн тоо нь \mathcal{R}_0 -ийн утгаас хамаарна.

$\mathcal{R}_0 < 1$ үед систем

$$\mathcal{E}_0^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \quad (2.13)$$

ганц тогтвортой тэнцвэрийн цэгтэй байх бөгөөд энэ нь глобаль шинжтэй байна. Энэ тэнцвэрийн цэгийг гадаад тэнцвэр буюу халдваргүй байх тэнцвэрийн цэг гэнэ.

$\mathcal{R}_0 > 1$ үед \mathcal{E}_0^* тэнцвэрийн цэг тогтворгүй бөгөөд локаль шинжтэй болно. Үүнээс гадна системд хоёрдогч тэнцвэрийн цэг

$$\mathcal{E}_1^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu(\mu + \alpha)}{\gamma\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\alpha}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right) \quad (2.14)$$

бий болдог. Энэ \mathcal{E}_1^* тэнцвэрийн цэгийг дотоод тэнцвэр буюу эндемик тэнцвэрийн цэг гэнэ. Эндемик тэнцвэрийн цэг нь тогтвортой бөгөөд глобаль шинжтэй болно.

2.3. SEIR загварын өргөтгөсөн стандарт бус схем

Халдвар тархалтын SEIR загвар (2.8)-ийг

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(X) + C \quad (2.15)$$

матрицан хэлбэрт бичвэл

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu \end{bmatrix},$$

$$B(X) = \begin{bmatrix} -\beta SI \\ \beta SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \Lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

болно. Өргөтгөсөн стандарт бус ялгаварт схем (2.6) байгуулахын тулд Φ матрицыг олбол

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma - \alpha}(\phi_3 - \phi_2) & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 + \frac{\gamma}{\gamma - \alpha}\phi_2 - \frac{\gamma}{\gamma - \alpha}\phi_3 & \phi_1 - \phi_3 & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

болно. Энд:

$$\phi_1(h) = \frac{1 - e^{-h\mu}}{\mu}, \quad \phi_2(h) = \frac{1 - e^{-h(\mu+\gamma)}}{\mu + \gamma}, \quad \phi_3(h) = \frac{1 - e^{-h(\mu+\alpha)}}{\mu + \alpha} \quad (2.18)$$

болно. Урвуу матрицыг

$$\Phi^{-1}(h) = \begin{bmatrix} \phi_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma - \alpha}(\phi_3^{-1} - \phi_2^{-1}) & \phi_3^{-1} & 0 \\ 0 & \phi_1^{-1} + \frac{\alpha}{\gamma - \alpha}\phi_2^{-1} - \frac{\gamma}{\gamma - \alpha}\phi_3^{-1} & \phi_1^{-1} - \phi_3^{-1} & \phi_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

олж өргөтгөсөн стандарт бус ялгаварт схемийг байгуулбал:

$$\begin{aligned}
 \frac{S^{n+1} - S^n}{\phi_1} &= \Lambda - \beta I^n S^{n+1} - \mu S^n, \\
 \frac{E^{n+1} - E^n}{\phi_2} &= \beta I^n S^{n+1} - (\mu + \gamma) E^n, \\
 \frac{I^{n+1} - I^n}{\phi_3} &= \gamma E^n - (\mu + \alpha) I^n + c_{31}, \\
 \frac{R^{n+1} - R^n}{\phi_1} &= \alpha I^n - \mu R^n + c_{41} + c_{42}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

болно. Энд:

$$\begin{aligned}
 c_{31} &= \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} (\phi_2^{-1} - \phi_3^{-1}) (E^{n+1} - E^n), \\
 c_{41} &= (\phi_3^{-1} - \phi_1^{-1}) (I^{n+1} - I^n), \\
 c_{42} &= \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \phi_3^{-1} - \frac{\alpha}{\gamma - \alpha} \phi_2^{-1} - \phi_1^{-1} \right) (E^{n+1} - E^n).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Шинээр байгуулсан халдвар тархалтын SEIR загварын өргөтгөсөн стандарт бус ялгаварт схем (2.20) нь дараах онцлогуудтай. Үүнд:

1. Схемийн ялгаварт тэгшитгэл бүрийн хуваарь нь ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ялгаатай байгаа нь бусад стандарт бус схемүүдээс ялгаатай байна.
2. Схемийн 3 ба 4 дугаар ялгаварт тэгшитгэлүүдийн баруун талд нэмэлт гишүүд c_{31}, c_{41}, c_{42} бий болсон байна.

2.4. Хүн амын тоо хадгалагдах хууль

(2.8) системийн хувьд нийт хүн амын тоо (2.11) нөхцөлийг хангадаг тул уг системийг тооцоолох аливаа ялгаварт схемүүдийн хувьд

$$N^n = S^n + E^n + I^n + R^n \tag{2.22}$$

нийт хүн амын тоо мөн энэ нөхцөлийг хангаж байх нь зүйтэй юм. Шинээр байгуулсан схемийн хувьд энэ чанар хадгалагдаж байгааг баталъя.

Теорем 2.1. (2.20) схемийн хувьд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N^n = \frac{\Lambda}{\mu} \tag{2.23}$$

асимптот нөхцөл биелэнэ.

Баталгаа. (2.20) системийн бүх тэгшитгэлүүдийг хооронд нь нэмбэл

$$N^{n+1} = (1 - \mu\phi_1)N^n + \Lambda\phi_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.24}$$

болно. $\{N^n\}$ дараалал эхний гишүүний утгаас хамаарч:

1. $N^0 < \frac{\Lambda}{\mu}$ үед дээрээсээ зааглагдсан, монотон өсдөг,
2. $N^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$ үед тогтмол,
3. $N^0 > \frac{\Lambda}{\mu}$ үед доороосоо зааглагдсан, монотон буурдаг

болохыг тус тус хялбархан баталж болно. Иймд $\{N^n\}$ дарааллын хязгаар L оршин байх бөгөөд уг хязгаарыг

$$L = (1 - \mu\phi_1)L + \Lambda\phi_1$$

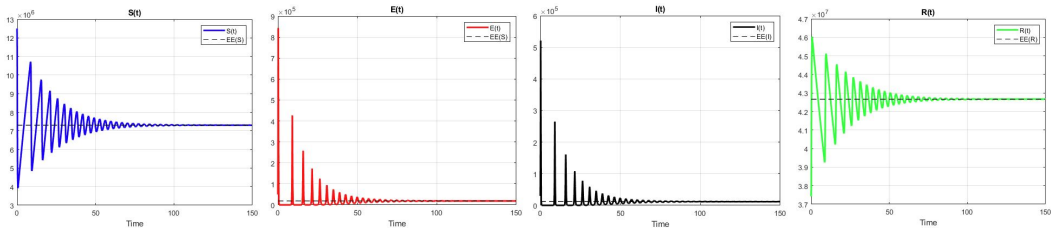
тэнцэгтгэлээс олбол $L = \frac{\Lambda}{\mu}$ болж теорем батлагдана. \square

3. Үр дүн

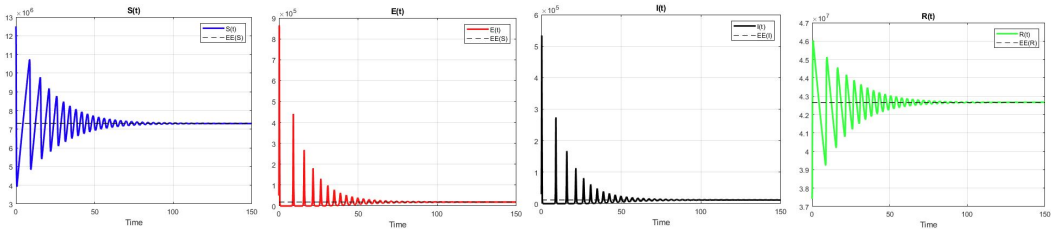
3.1. Тоон туршилт

Тоон туршилтыг хийхдээ (2.8) системийн анхны нөхцөл болон параметруудийг [7] ажилд авсан $S(0) = 12500000$, $E(0) = 50000$, $I(0) = 30000$, $R(0) = 37420000$, $\mu = 0.02$, $\beta = 0.00001$, $\alpha = 73$, $\gamma = 45.6$ утгуудаар тооцоолов. (2.20) схемийн алхамын хэмжээг $h = 0.002$ ба $h = 0.02$ үед стандарт схем болон ижил ялгаварт харьцаа бүхий Микенсийн төрлийн схемтэй тус тус харьцуулан харуулсан.

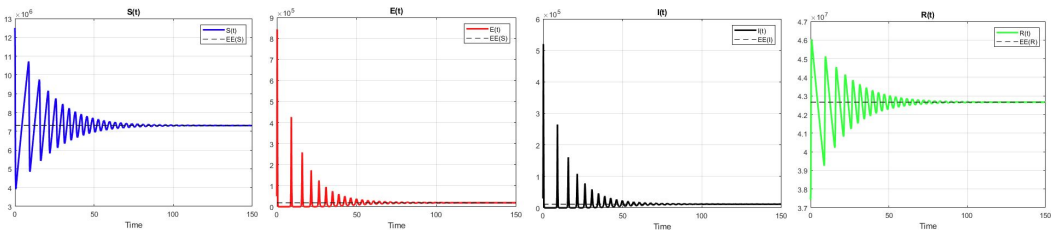
(2.20) схемийн алхамын хэмжээ $h = 0.002$ үед:



Зураг 1: Стандарт схем.

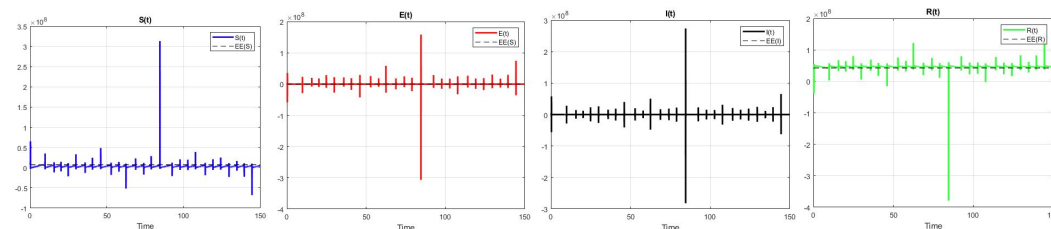


Зураг 2: Микенсийн төрлийн схем.

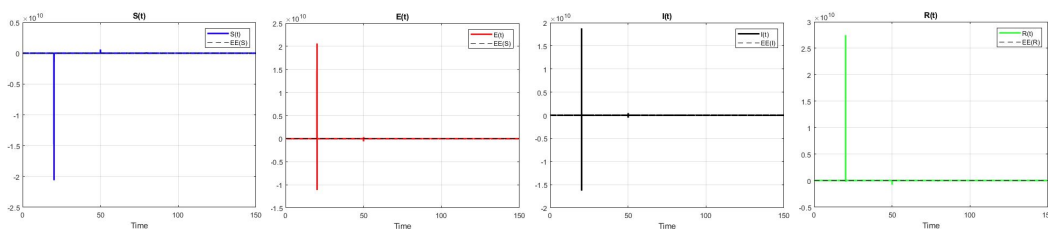


Зураг 3: Шинэ схем.

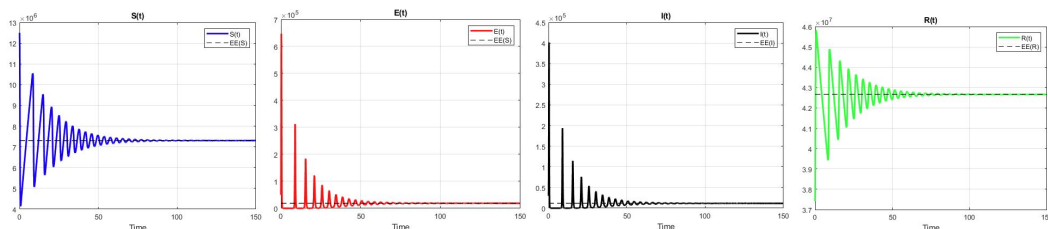
(2.20) схемийн алхамын хэмжээ $h = 0.02$ үед:



Зураг 4: Стандарт схем.



Зураг 5: Микенсийн төрлийн схем.



Зураг 6: Шинэ схем.

4. Дүгнэлт

Дифференциал тэгшитгэлийг ойролцоолон бодох стандарт аргуудын (Эйлер, Рунг-Кутгийн гэх мэт) хувьд схемийн алхамын хэмжээг хангалттай бага үед тооцоолол хийдэг. Харин алхамын хэмжээг их болгонгуут шийдийн тоон тогтворгүйжилт бий болдог. Үүнээс зайлсхийхийн тулд стандарт бус схемийг Микенс боловсруулсан байна.

Гэвч Микенсийн төрлийн стандарт бус схемд уламжлалыг илэрхийлэх ялгаварт харьцааны хуваарийг сонгохдоо дифференциал тэгшитгэлүүдийн системийн тэгшитгэл бүрийн хувьд тоон торны алхамаас хамаарсан ижил $\phi(h)$ функц сонгож байгаа нь учир дутагдалтай юм. Учир нь уг функцийн параметр нь тэгшитгэл бүрд байх албагүй.

Бидний шинээр байгуулсан стандарт бус схем нь энэхүү дутагдалаас ангид бөгөөд дифференциал тэгшитгэл бүрт харгалзах ялгаварт харьцааны хуваарь нь өөр, өөр функцүүд байна.

Дээрх тоон туршилтаас харахад алхамын хэмжээ $h = 0.002$ үед гурван схемийн тооцоолол бараг ойролцоо гарсан (Зураг 1-3) боловч алхамын хэмжээ $h = 0.02$ болж 10 дахин томроход стандарт схем болон Микенсийн төрлийн схемийн шийд илт сарнисан байна (Зураг 4, 5). Харин эдгээр тохиолдлын алинд нь ч (2.20) шинэ схем нь (2.8) системийн шийдийн тогтворжилтыг илүү сайн хангаж чадсан байна (Зураг 6).

Ном зүй

- [1] R. E. Mickens, “Nonstandard finite difference models of differential equations,” *World Scientific*, 1994, doi: <https://doi.org/10.1142/2081>.
- [2] R. E. Mickens, “Nonstandard finite difference schemes for differential equations,” *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, pp. 823–847, 2002, doi: <https://doi.org/10.1080/102361902100000807>.
- [3] R. E. Mickens, “Dynamic consistency: a fundamental principle for constructing nonstandard finite difference schemes for differential equations,” *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, pp. 645–653, 2005, doi: <https://doi.org/10.1080/10236190412331334527>.
- [4] R. E. Mickens, “Numerical integration of population models satisfying conservation laws: NSFD methods,” *Journal of Biological Dynamics*, 1, pp. 427–436, 2007, doi: <https://doi.org/10.1080/17513750701605598>.
- [5] R. E. Mickens, “A SIR-model with square-root dynamics: An NSFD scheme,” *Journal of Difference Equations and Applications*, 16, pp. 209–216, 2010, doi: <https://doi.org/10.1080/10236190802495311>.

- [6] R. E. Mickens, and T. M. Washington, “A note on an NSFD scheme for a mathematical model of respiratory virus transmission,” *Journal of Difference Equations and Applications*, 18, pp. 525–529, 2012, doi: <https://doi.org/10.1080/10236198.2010.515590>.
- [7] H. Jansen, and E.H. Twizell, “An unconditionally convergent discretization of the SEIR model,” *Mathematics and Computers in Simulation*, 58, pp. 147–158, 2002, doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(01\)00356-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(01)00356-1).
- [8] G. González-Parra, R. J. Villanueva, and A. J. Arenas, “Matrix Nonstandard Numerical Schemes for Epidemic Models,” *WSEAS transactions on Mathematics*, 9, 2010.
- [9] K. F. Gurski, “A simple construction of nonstandard finite-difference schemes for small nonlinear systems applied to SIR models,” *Computers and Mathematics with Applications*, 66, pp. 2165–2177, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.06.034>.
- [10] Q. Cui, J. Xu, Q. Zhang, and K. Wang, “An NSFD scheme for SIR epidemic models of childhood diseases with constant vaccination strategy,” *Advances in Difference Equations*, 2014:172, 2014, doi: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-172>.
- [11] Z. Fitriah, and A. Suryanto, “Nonstandard finite difference scheme for SIRS epidemic model with disease-related death,” *Symposium on Biomathematics (Symomath 2015)*, AIP Conf. Proc, pp. 1723, 2016, doi: <https://doi.org/10.1063/1.4945067>.
- [12] A. Farooqi, R. Ahmad, R. Farooqi, S. O. Alharbi, D. Baleanu, M. Rafiq, I. Khan, and M. O. Ahmad, “An accurate predictor-corrector-type nonstandard finite difference scheme for an SEIR epidemic model,” *Journal of Mathematics*, Hindawi, 2020, doi: <https://doi.org/10.1155/2020/8830829>.
- [13] I. Darti, and A. Suryanto, “Dynamics of a SIR epidemic model of childhood diseases with a saturated incidence rate: Continuous model and its nonstandard finite difference discretization,” *MDPI, Mathematics*, 8, pp. 1459, 2020, doi: <https://doi.org/10.3390/math8091459>.
- [14] M. M. Khalsaraei, A. Shokri, S. Noeiaghdam, and M. Molayi, “Nonstandard finite difference schemes for an SIR epidemic model,” *MDPI, Mathematics*, 9, pp. 3082, 2021, doi: <https://doi.org/10.3390/math9233082>.
- [15] M. E. Songolo, and B. Bidegaray-Fesquet, “Extending nonstandard finite difference schemes rules to systems of nonlinear ODEs with constant coefficients,” *HAL*, 2021.
- [16] M. Martcheva, “An introduction to mathematical epidemiology,” *Springer*, 2015, doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3>.

Extending Nonstandard Finite Difference Scheme for the SEIR Epidemic Model

Enkh-Amar Shagdar*, Batgerel Balt

Institute of Mathematics and Digital Technology, Mongolian Academy of Sciences, Ulaanbaatar 13330, Mongolia

**Corresponding author: enkhamar_sh@mas.ac.mn; ORCID:0000-0001-5305-2021*

Article Info: Received: 2022.09.07; Accepted: 2022.10.01; Published: 2022.12.26

Abstract: When constructing a non-standard difference scheme for the differential equations, denominator of the discrete derivative is chosen as the functions depending on step-sizes on the computational grid or lattice. In other existing non-standard finite difference methods for SEIR epidemic model, those denominator functions have the same. The new scheme discussed in this article is characterized by the fact that the corresponding derivatives of the system of ordinary differential equations are replaced by different denominator functions depending on each equation. The proposed method has important property that conservation law. By numerical comparisons are confirmed that the accuracy of new method is better than that of standard and non-standard finite difference schemes (Mickens-type NSFD schemes with the same denominator functions).

Key words: Matrix exponential, Conservation law
